۴۱ - می‌خواهیم بین R و B ۳ مداد رنگی باشد. از کل ۱۲ تا
۷ مداد رنگی باقی می‌ماند که قبل و بعد
قرمز و آبی قرار می‌گیرند

$\boxed{4}\quad R\ \boxed{3}\ B\quad \boxed{3}$

پس ابتدا $\binom{10}{3}$ داریم بعد باید جایگشت ها در نظر بگیریم

$R\ \boxed{3}\ B$ به عنوان یک دسته در نظر می‌گیریم

قرمز و آبی $\longrightarrow 2!$

3 مداد رنگی بین قرمز و آبی $\longrightarrow 3!$

باقی مداد رنگی ها با $(R\ \boxed{3}\ B) \longrightarrow 8!$

$$\begin{cases} n_A = \binom{10}{3} \times 2! \times 3! \times 8! \\ n_S = 12! \end{cases}$$

$$P = \frac{n_A}{n_S} = \frac{\binom{10}{3}\, 2! \times 3! \times 8!}{12!} = \frac{\cancel{\frac{10!}{7!\,3!}} \times \cancel{2} \times \cancel{3!} \times \cancel{7!} \times \overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{12!}\ 11 \times \cancel{12}\ 3}$$

$$= \frac{4}{33} = 0/12$$

سطح: ساده

۴۲ - سؤال است $X \mid Y = y$ را می خواهد پس باید به دنبال تابع چگالی $f_{X|Y}(x|y)$ باشیم

اینجا دو راه داریم

راه اول (طولانی)

$$E(X \mid Y = \tfrac{1}{2}) = \iint_{\substack{Y=\frac{1}{2} \\ \underbrace{\frac{1}{2} < x \le 1}}} \frac{x f_{X,Y}(x,y)}{P(Y=\frac{1}{2})}$$

$A = ?$ $$\int_0^1 \int_y^1 A \, dx \, dy = \int_0^1 A(1-y) \, dy = A\left(y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 1$$

$$A = 2$$

$$f_Y(y) = \int_y^1 2 \, dx = 2(1-y)$$

$$P(Y = \tfrac{1}{2}) = 2(1 - \tfrac{1}{2}) = 2 \times \tfrac{1}{2} = 1$$

$$E(X \mid Y = \tfrac{1}{2}) = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 2x \, dx}{1} = \frac{x^2 \Big|_{\frac{1}{2}}^1}{1} = 1 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

راه دوم (سریع)

$X \mid Y = y$ توزیع یکنواخت دارد در بازه $(y, 1)$ یعنی ما می دونیم که y اتفاق افتاده پس X در یک بازه دارای تابع چگالی احتمال ثابت است پس توزیع یکنواخت دارد

$$X \mid Y = y \sim U(y, 1)$$

$$E(X \mid Y = y) = \frac{y+1}{2} \qquad E(X \mid Y = \tfrac{1}{2}) = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

گزینه ۱

سطح: ساده

$$\phi_X(s) = E\{e^{sX}\} = \left(\frac{1}{3}e^s + \frac{2}{3}\right)^{10}$$

راه اول:

$$Z = (3X-1)^2 \qquad E(Z) = E\left((3X-1)^2\right) =$$

$$E(9X^2 - 6X + 1) = 9E(X^2) - 6E(X) + 1$$

$$E(X) = \frac{d\phi_X(s)}{ds}\bigg|_{s=0} = \frac{10}{3}e^s\left(\frac{1}{3}e^s + \frac{2}{3}\right)^9\bigg|_{s=0} = \frac{10}{3}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{3}$$

$$E(X^2) = \frac{d^2\phi_X(s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} = \frac{10}{3}e^s\left(\frac{1}{3}e^s+\frac{2}{3}\right)^9 + \frac{90}{9}e^s\left(\frac{1}{3}e^s+\frac{2}{3}\right)^8\bigg|_{s=0}$$

$$= \frac{10}{3}\times 1 + 10 = \frac{40}{3}$$

$$E(Z) = 9\times\frac{40}{3} - 6\times\frac{10}{3} + 1 = 120 - 20 + 1 = 101$$

گزینه ۳ سطح: ساده

راه دوم:

$$M_X(t) = (pe^t + q)^n$$

$$\Updownarrow$$

$$\phi_X(s) = (pe^s + q)^n \longrightarrow \begin{array}{l} p = \frac{1}{3} \\ q = \frac{2}{3} \\ n = 10 \end{array} \qquad X \sim B\left(n=10, \frac{1}{3}\right)$$

$$E(Z) = E(9X^2 - 6X + 1) = 9E(X^2) - 6E(X) + 1$$

$$X \sim B\left(n=10, \frac{1}{3}\right)$$

$$E(X) = np = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow E(X^2) = \frac{20}{9} + \frac{100}{9} = \frac{120}{9} = \frac{40}{3}$$

$$Var(X) = npq = \frac{20}{9}$$

$$E(Z) = 120 - 20 + 1 = 101$$

اول نیاز به مقادیر A و B داریم

$$\int_1^\infty \frac{A}{x^2}\,dx = -\frac{A}{x}\Big|_1^\infty = A = 1$$

$$\int_1^\infty \frac{B}{y^3}\,dy = -\frac{B}{2}y^{-2}\Big|_1^\infty = \frac{B}{2} = 1 \Rightarrow B = 2$$

X, Y مستقل اند $\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$

$$= \frac{2}{x^2y^3}$$

$$P[X>Y] = \iint\limits_{\substack{X>Y \\ X,Y\geq 1}} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_1^\infty \int_1^x \frac{2}{x^2y^3}\,dy\,dx$$

$$\int_1^\infty -\frac{1}{x^2y^2}\Big|_1^x\,dx = \int_1^\infty -\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$+\frac{1}{3}x^{-3} - x^{-1}\Big|_1^\infty = 1-\frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

گزینه ۳

سطح: متوسط

۴۵ ـ گزینه ۴

$$X \sim U(-1, 1) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = 0 \\ var(X) = \frac{1}{3} \\ E(X^2) = \frac{1}{3} \end{cases} \qquad Y = X^n$$

$$Cov(Y, n) = E(nY) - E(n)E(Y)$$

$$E(n) = \sum_{n=0}^{2} n\,p(n) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1$$

$E(Y) = E(X^n)$ زمانی $Y = X^n$ را داریم که n رخ داده باشد بنابراین

$$\underbrace{\underbrace{E(X^n \mid n=0)}_{1} \times \underbrace{P(n=0)}_{\frac{1}{3}}}_{\frac{1}{3}} + \underbrace{E(X^n \mid n=1)}_{\underset{0}{E(X)}} \underbrace{P(n=1)}_{\frac{1}{3}} + \underbrace{\underbrace{E(X^n \mid n=2)}_{E(X^2)} \underbrace{P(n=2)}_{\frac{1}{3}}}_{\frac{1}{9}}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

به همین ترتیب nX^n

$$E(nX^n) = E(nX^n \mid n=0)\,p(n=0) + E(nX^n \mid n=1)\,p(n=1)$$

$$+ E(nX^n \mid n=2)\,p(n=2) = \frac{1}{3} \times 0 + 0 \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$Cov(Y, n) = \frac{2}{9} - 1 \times \frac{4}{9} = -\frac{2}{9}$$

گزینه ۴

سطح: متوسط رو به بالا