حل سؤالات ریاضی

****

حل ۱ : ابتدا طرفین معادله دیفرانسیل را بر $\cos^2 y$ تقسیم می‌کنیم، و سپس تغییر متغیر $z = \tan y$ را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{y'}{\cos^2 y} - 2x\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right) = xe^{-x^2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} - 2xz = xe^{-x^2} \Rightarrow e^{-x^2}\frac{dz}{dx} - 2xe^{-x^2}z = xe^{-2x^2}$$

$$\frac{d}{dx}[ze^{-x^2}] = xe^{-2x^2} \Rightarrow ze^{-x^2} = -\frac{1}{4}e^{-2x^2} + c \Rightarrow \tan y = -\frac{1}{4}e^{-x^2} + ce^{x^2}$$

لذا جواب (۱) درست است.

حل ۲ : با تعریف $Y(s) = L[y(t)] = \int_0^\infty e^{-st}y(t)dt$ داریم:

$$\begin{cases} L[y'(t)] = sY(s) - y(0) = \int_0^\infty e^{-st}y'(t)dt \\ L[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}L[y'] = -L[ty'] \Rightarrow sY'(s) + Y(s) = -L[ty'] \\ -L[ty''] = \frac{d}{ds}L[y''] = 2sY(s) + s^2Y'(s) - y(0) \end{cases}$$

از طرفین معادله دیفرانسیل داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$-2sY(s) - s^2Y'(s) + y(0) + sY(s) - y(0) + sY'(s) + Y(s) + nY(s) = 0$$

که معادله دیفرانسیل مرتبه اول نسبت به s است $(s - s^2)Y'(s) - (s-1)Y(s) + nY(s) = 0$ و جواب عمومی فقط بستگی به یک ثابت دلخواه دارد، و اگر از آن عکس تبدیل لاپلاس بگیریم، آنگاه $y(t)$ فقط به یک ثابت دلخواه بستگی خواهد داشت.

لذا جواب (۳) درست است.

حل ۳:

$$L[e^{-t}]=\frac{1}{s+1}\Rightarrow(-1)^n L[t^n e^{-t}]=\frac{d^n}{ds^n}(\frac{1}{s+1})=\frac{(-1)^n n!}{(s+1)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow L[t^n e^{-t}]=\frac{n!}{(s+1)^{n+1}}\Rightarrow L[\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})]=s^n L[t^n e^{-t}]=\frac{n!s^n}{(s+1)^{n+1}}$$

چون $(t^n e^{-t})$ و مشتقّات آن تا مرتبه $(n-1)$ در $t=0$ صفراند.

$$\Rightarrow L[e^t\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})]=\frac{n!(s-1)^n}{s^n}$$

لذا جواب (۳) درست است

حل ۴: معادله دوم را از معادله اول کم می‌کنیم

$$y_1'-y_2'=y_1-y_2\Rightarrow y_1-y_2=c_1e^t$$

با استفاده از شرایط اولیه داریم $c_1=-3$. در معادله دیفرانسیل اول بجای y_2 جایگزین می‌کنیم

$$\Rightarrow y_1'(t)=-2y_1+3e^t+u(t-1)e^t\Rightarrow y_1'(t)+2y_1=+3e^t+u(t-1)e^t$$

$$\Rightarrow sY_1(s)+2Y_1(s)=\frac{3}{s-1}+eL[u(t-1)e^{(t-1)}]=\frac{3}{s-1}+\frac{ee^{-s}}{s-1}\Rightarrow$$

$$Y_1(s)=\frac{3}{(s-1)(s+2)}+\frac{ee^{-s}}{(s-1)(s+2)}=[\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+2}]+\frac{e}{3}[\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+2}]e^{-s}$$

با گرفتن تبدیل عکس لاپلاس از رابطه بالا داریم

$$\Rightarrow y_1(t)=e^t-e^{-2t}+\frac{e}{3}[e^{t-1}-e^{-2(t-1)}]u(t-1)$$

$$=e^t-e^{-2t}+\frac{1}{3}[e^t-e^3e^{-2t}]u(t-1)$$

لذا جواب (٤) درست است.

حل ۵: با ضرب داخلی طرفین رابطه داده شده در $\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{l\pi y}{b}$ داریم:

$$\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{l\pi y}{b}dxdy$$

$$=A_{kl}(\int_0^a\sin^2\frac{k\pi x}{a}dx)(\int_0^b\sin^2\frac{l\pi y}{b}dy)=\frac{ab}{4}A_{kl}$$

لذا جواب (۲) درست است.

حل ۶: با توجه به جواب داده شده $G(x)$ یک تابع اولیه برای $\frac{1}{2a}g(x)$ می‌باشد. پس:

$$G(x)=\frac{1}{2a}\int_{x_1}^{x}g(s)ds=\begin{cases}0 & , x\le x_1\\ \frac{1}{2a}g_0(x-x_1) & , x_1<x\le x_2\\ \frac{1}{2a}g_0(x_2-x_1) & , x>x_2\end{cases}$$

لذا جواب (۱) درست است.

حل ۷: از طریق جداسازی متغیرها در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم $u=F(x)G(t)$:

$$F(x)\dot{G}(t)=C^2F''(x)G(t)\Rightarrow\frac{\dot{G}(t)}{C^2G(t)}=\frac{F''(x)}{F(x)}=\lambda_{\text{ثابت}},u_x(0,t)=0=u_x(L,t)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}F''(x)=\lambda F(x) & \underline{\lambda=-\alpha^2}<0\Rightarrow F(x)=A\cos(\alpha x)+B\sin(\alpha x)\\ F'(0)=0=F'(L) & F'(0)=B\alpha=0\Rightarrow B=0\ ,\ F'(L)=-A\alpha\sin(\alpha L)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\alpha L=k\pi\Rightarrow\alpha_k=\frac{k\pi}{L}\Rightarrow F_k(x)=A\cos(\frac{k\pi}{L}x)\ ,\ k\in\mathbb{N}$$

$$\underline{\lambda=0}\Rightarrow F_0(x)=A_0+B_0x\ ,\ F'(0)=B_0=0=F'(L)\Rightarrow F_0(x)=A_0$$

به‌ازای $\lambda=\alpha^2>0$ می‌توان به‌آسانی تحقیق نمود که جواب غیرصفر برای F نداریم:

$$\lambda_k=-\alpha_k^2<0\Rightarrow\dot{G}(t)+\alpha_k^2C^2G(t)=0$$

$$\Rightarrow G_k(t)=C'e^{-\alpha_k^2C^2t}\Rightarrow u_k(x,t)=A_ke^{-\alpha_k^2C^2t}\cos\frac{k\pi x}{L}$$

$$\lambda_0=0\Rightarrow\dot{G}(t)=0\Rightarrow G(t)=D_{\text{ثابت}}\Rightarrow u_0(x,t)=A_0$$

$$u(x,t)=u_0(x,t)+\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_ke^{-C^2\alpha_k^2t}.\cos\frac{k\pi x}{L}$$

لذا جواب (۱) درست است

حل ۸: حل از طریق جداسازی متغیرها. کاندید $T=F(x)G(y)$ را در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم:

$$F''(x)G(y)+F(x)G''(y)=0\Rightarrow\frac{F''(x)}{F(x)}+\frac{G''(y)}{G(y)}=0$$

$$\Rightarrow \frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda \ , \ \frac{G''(y)}{G(y)} = -\lambda \ \text{ثابت}$$

$$\left.\begin{array}{l} T(\circ, y) = T(a, y) \Rightarrow F(\circ) = F(a) \\ T_x(\circ, y) = T_x(a, y) \Rightarrow F'(\circ) = F'(a) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} F''(x) = \lambda F(x) \\ F(\circ) = F(a), F'(\circ) = F'(a) \end{cases}$$

$$\underline{\lambda = -\alpha^{۲} < \circ} \Rightarrow F(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x), F(\circ) = F(a)$$

$$\Rightarrow A = A\cos\alpha a + B\sin\alpha a$$

$$F'(\circ) = F'(a) \Rightarrow B\alpha = -A\alpha\sin(\alpha a) + B\alpha\cos(\alpha a)$$

$$\Rightarrow A\sin\alpha a + B(۱ - \cos\alpha a) = \circ$$

$$\begin{cases} A(۱ - \cos\alpha a) - B\sin\alpha a = \circ \\ A\sin\alpha a + B(۱ - \cos\alpha a) = \circ \end{cases} \Rightarrow (۱ - \cos\alpha a)^{۲} + \sin^{۲}(\alpha a) = ۲ - ۲\cos\alpha a = \circ$$

دترمینان دستگاه صفر قرار داده شده، برای اینکه A و B بتوانند غیرصفر باشند. پس $\alpha a = ۲k\pi$، یعنی $\alpha_k = \frac{۲k\pi}{a}$ و $F_k(x) = A_k\cos\alpha_k x + B_k\sin\alpha_k x$. λ مثبت جواب غیرصفر برای F نمی‌دهد.

$$\underline{\lambda = \circ} \Rightarrow F_\circ(x) = A_\circ + B_\circ x \ , \ F_\circ(\circ) = A_\circ = F_\circ(a) = A_\circ + B_\circ a \Rightarrow B_\circ = \circ$$

$$F_\circ'(a) = F_\circ'(\circ) = \circ \Rightarrow F_\circ(x) = A_\circ \ \text{ثابت دلخواه}$$

بنابراین پایهٔ متعامد کامل برای بسط (طبق قضیه اشتورم- لیوویل) عبارتست از:

$$\frac{۱}{۲} \ , \ \cos\frac{۲k\pi x}{a} \ , \ \sin\frac{۲k\pi x}{a} \ , \ \forall k = ۱, ۲, ۳, ٤, \ldots$$

لذا جواب (۱) درست است.

حل ۹: به‌ازای هر c حقیقی:

$$\phi(x, y) = x^{۳} - ۳xy^{۲} = \mathrm{Re}[(x + iy)^{۳} + ic] = \mathrm{Re}(z^{۳} + ic)$$

$$\Rightarrow G(z) = z^{۳} + ic = x^{۳} - ۳xy^{۲} + i(۳xy^{۲} - y^{۳} + c)$$

لذا جواب (۲) درست است.

حل ۱۰:

$$W = \sin z = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y \ , \ x = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow W = \cosh y$$

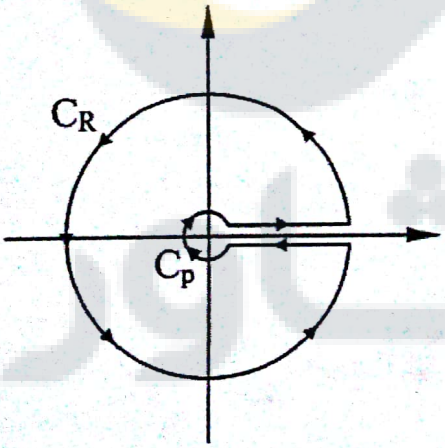
که تابع زوجی می‌باشد. به همین ترتیب به‌ازای $x=-\frac{\pi}{۲}$ داریم $W=-\cosh y$ که زوج است. یعنی تبدیل $W=\sin z$ بر روی خط $x=\frac{\pi}{۲}$ یک‌به‌یک نیست و بر روی خط $x=-\frac{\pi}{۲}$ نزدیک به یک نمی‌باشد اما وقتی بجای نوار نیمه نوار در نظر بگیریم خاصیت یک به یک و پوششی بودن برقرار خواهد بود. یعنی به‌راحتی دیده می‌شود که (۲) و (۳) و (٤) درست هستند ولی (۱) نادرست است.

لذا جواب (۱) درست است.

حل ۱۱ : نقاط غیرتحلیلی تابع $\text{Log}(۳+z)$ عبارتند از یک نیم‌خط که از $z=-۳$ آغاز می‌شود و به دور می‌رود (بر روی نیم‌محور xهای منفی). لذا نقاط غیرتحلیلی تابع $f(z)$ در دردون مرز $|z|=۲$ فقط عبارتند از صفرهای مخرج در درون این مرز یعنی نقاط $z=۰$ و $z=\pm i\sqrt{۲}$، یعنی سه نقطه.

لذا جواب (۲) درست است.

حل ۱۲ : روی مرز بسته مطابق شکل C که در جهت مثلثاتی است انتگرال می‌گیریم که در درون و بر روی آن تابع $f(z)=\frac{z^{-a}}{۱+z}=\frac{e^{-a\log z}}{۱+z}$ تحلیلی است بجز در یک نقطه $z=-۱$ که نقطه تکین تنهای تابع است. پس بنابر قضیه مانده:



$$\int_\rho^R \frac{x^{-a}}{۱+x}dx+\int_{C_R}\frac{z^{-a}}{۱+z}dz+\int_R^\rho \frac{e^{-a(\text{Ln}r+۲\pi i)}}{۱+r}dr+\int_{C_\rho}\frac{z^{-a}}{۱+z}dz=۲\pi i\,\text{Res}[f(z),-۱]$$

با میل دادن $R\to\infty$ انتگرال روی C_R به صفر میل می‌کند با توجه به شرط $a>۰$، و همچنین انتگرال بر روی C_ρ به صفر میل می‌کند وقتی $\rho\to ۰$ با توجه به شرط $a<۱$. پس:

$$(۱-e^{-۲\pi i a})\int_۰^\infty \frac{x^{-a}}{۱+x}dx=۲\pi i e^{-a(\pi i)}\Rightarrow I=\int_۰^\infty \frac{x^{-a}}{۱+x}dx=۲\pi i\frac{e^{-a\pi i}}{۱-e^{-۲\pi i a}}$$

$$\Rightarrow I=۲\pi i\frac{۱}{e^{a\pi i}-e^{-a\pi i}}=\frac{\pi}{\sin(a\pi)}$$

لذا جواب (٤) درست است.

حل ۱۳ : تعداد حالات مساعد $\left[\binom{۱۰}{۲}\times ۳\right]+\left[۱۰\times\binom{۳}{۲}\right]=۱۶۵$، و تعداد حالات ممکن $۱۵\times ۲۹=\binom{۳۰}{۲}$ پس احتمال مطلوب $P=\frac{۱۶۵}{۱۵\times ۲۹}=\frac{۱۱}{۲۹}$.

لذا جواب (۲) درست است.

حل ۱۴ : طبق تعریف امید ریاضی:

$$E(x)=\int_{۰}^{a} xf_x(x)dx=\int_{۰}^{a}\frac{٤x}{\pi(۱+x^{۲})}dx=\frac{۲}{\pi}[Ln(۱+x^{۲})]_{۰}^{a}$$

$$=\frac{۲}{\pi}Ln(۱+a^{۲})=\frac{۲Ln۲}{\pi}\Rightarrow Ln(۱+a^{۲})Ln۲\Rightarrow ۱+a^{۲}=۲\Rightarrow a=۱$$

لذا جواب (۳) درست است.

حل ۱۵ :

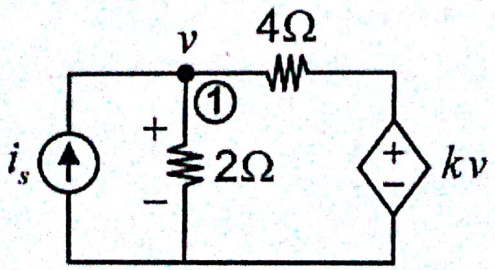
$$P(y<\sqrt{x})=\int_{۰}^{\infty}\int_{۰}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{x}{۲}}ye^{-y^{۲}}dydx=\int_{۰}^{\infty}[-\frac{۱}{۲}e^{-y^{۲}}]_{۰}^{\sqrt{x}}e^{-\frac{x}{۲}}$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\infty}e^{-\frac{x}{۲}}(۱-e^{-x})dx=[-e^{-\frac{x}{۲}}]_{۰}^{\infty}+\frac{۱}{۳}[e^{-\frac{۳}{۲}x}]_{۰}^{\infty}=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

لذا جواب (٤) درست است.

حل سؤالات مدارهای الکتریکی

****



حل ۱۶ : چون ولتاژ v ناشی از i_s خواسته شده است، پس می‌توان v_s را برابر صفر قرار داد. بنابراین مقاومت‌های ۲ اهمی موازی شده و برابر یک اهم می‌شوند. مدار به‌صورت شکل مقابل درمی‌آید. با اعمال KVL در گره ۱ داریم:

$$\frac{v-kv}{۴}+\frac{v}{۲}=i_s \Rightarrow \frac{(۳-k)v}{۴}=i_s \Rightarrow v=\frac{۴i_s}{۳-k}=\frac{i_s}{۲}$$

یا $۳-k=۸$ یا $k=-۵$. لذا جواب (۳) درست است.

حل ۱۷ : ابتدا ولتاژ دو سر منبع جریان ۵ آمپری را به‌دست می‌آوریم. اگر جریان‌های مش‌ها را $i_۱$ و $i_۲$ فرض کنیم، داریم: $i_۲-i_۱=۵$

با اعمال KVL در مش بیرونی داریم: $i_۱+۳i_۲+۲v_۰+i_۲+۱۱i_۱-۱۰=۰$

توجه کنید که $v_۰=-۱۱i_۱$ پس: $i_۱+۳i_۲-۱۱i_۱+i_۲=۱۰$

بنابراین دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را داریم:

$$\begin{cases}-۱۰i_۱+۴i_۲=۱۰\\ i_۲-i_۱=۵\end{cases}$$

از حل این معادلات بدست می‌آوریم: $i_۲=\frac{۲۰}{۳}$ و $i_۱=\frac{۵}{۳}$

ولتاژ دو سر منبع جریان برابر $v=۴i_۲+۲v_۰=۴i_۲-۲۲i_۱$ است، یا $v=-۱۰$. می‌توان تصور کرد که منبع جریان ۵ آمپری به جای یک مقاومت ۲ اهمی جایگزین شده است که به موجب قضیه جانشینی چون جریان‌ها یکسان است، پس جریان و ولتاژ بقیه شاخه‌ها تغییر نمی‌کند.

لذا گزینه (۱) درست است.

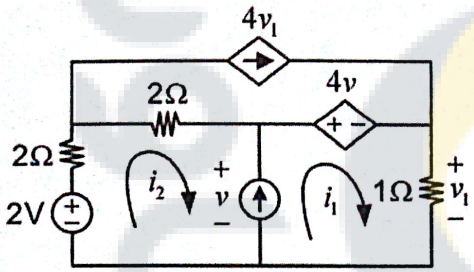
حل ۱۸ : مدار دو ثابت زمانی دارد و چون ورودی اثری در مقدار ثابت زمانی ندارد، می‌توان v_s را صفر گرفت. اگر ولتاژ اولیه‌ای در خازن باشد، با توجه تقارن (پل متقارن) از سلف جریانی نمی‌گذرد و مدار مانند یک مدار RC عمل می‌کند (می‌توان سلف را باز کرد). در این صورت دو مقاومت ۸ اهمی با هم‌موازی می‌شوند و خازن با مقاومت ۵ اهمی سری می‌شود.

بنابراین ثابت زمانی $T_۱=RC=\frac{۵}{۳}$ است.

اگر جریان اولیه‌ای در سلف باشد، با توجه به تقارن، جریانی از خازن نمی‌گذرد و می‌توان خازن را باز کرد. سلف با دو مقاومت ۸ اهمی موازی است، پس: $T_۲=\frac{L}{R}=\frac{۱}{۴}$

بنابراین بزرگترین ثابت زمانی مربوط به مدار RC است.

هنگامی که مقاومت‌های ٤ اهمی با مقاومت‌های ۲ اهمی جایگزین شوند، ثابت زمانی مدار RC برابر $T_1' = R'C = \frac{3}{3} = 1$ می‌شود. بنابراین بزرگترین ثابت زمانی به مقدار $\frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$ کم می‌شود. لذا گزینه (۲) درست است.



حل ۱۹: اگر جریان مش سمت راست را i_1 و جریان مش سمت چپ را i_2 بگیریم داریم: $i_1 - i_2 = \cos t$.

با اعمال KVL را در مش سمت راست داریم:

$$-v + 4v + v_1 = 0 \Rightarrow v - \frac{1}{3}v_1 = -\frac{1}{3}i_1$$

با اعمال KVL در حلقه متشکل از مش‌های ۱ و ۲ داریم:

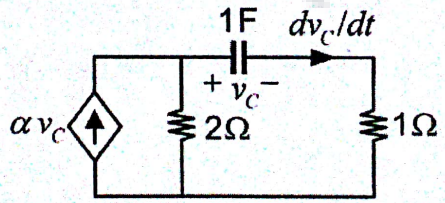
$-2 + 2i_2 + 2(i_2 - 4v_1) + 4v + i_1 = 0$ با جایگزینی $i_2 = i_1 - \cos t$ ، $v_1 = i_1$ و $v = -\frac{1}{3}i_1$، داریم:

$$-2 + 4i_1 - 4\cos t - 8i_1 - \frac{4}{3}i_1 + i_1 = 0 \Rightarrow -\frac{13}{3}i_1 = 4\cos t + 2$$

برای آنکه $v(t) = 0$ باشد، لازم است $i_1 = 0$ و یا $\cos t = -\frac{1}{2}$. در نتیجه $t = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$.

لذا گزینه (٤) درست است.

حل ۲۰: می‌دانیم جریان گذرنده از سلف پیوسته است، پس در تغییر آنی جریان i_s همهٔ تغییر جریان از خازن می‌گذرد. چون ولتاژ خازن نیز پیوسته است، پس خازن مانند اتصال کوتاه عمل می‌کند و این جریان $\frac{2}{3}$ آمپر از مقاومت R می‌گذرد. افزایش آنی ولتاژ v_L ناشی از $\frac{2}{3}R$ است، یعنی $\frac{2}{3}R = 2$ یا $R = 3$. لذا گزینه (٤) درست است.



حل ۲۱: می‌دانیم ورودی $u(t)$ نقشی در پایداری مدار ندارد و می‌توان آن را باز کرد و مدار شکل مقابل را به‌دست آورد. با اعمال KVL در مش سمت راست داریم:

$$v_C+\frac{dv_C}{dt}+۲(\frac{dv_C}{dt}-\alpha v_C)=۰ \Rightarrow ۳\frac{dv_C}{dt}+(۱-۲\alpha)v_C=۰$$

برای آن که مدار پایدار باشد باید ریشه معادله مشخصه آن در نیم صفحه چپ باشد، یعنی $s=\frac{۲\alpha-۱}{۳}<۰$، یعنی برای پایداری لازم است $۲\alpha-۱<۰$ باشد یا $\alpha<\frac{۱}{۲}$. بنابراین برای $\alpha>\frac{۱}{۲}$ مدار ناپایدار است و از این رو در گزینه (۳) برای $\alpha=۱$ مدار ناپایدار است.

لذا جواب (۳) درست است.

حل ۲۲: برای آنکه جمله Ae^{-t} در پاسخ ورودی صفر وجود داشته باشد لازم است $s=-۱$ فرکانس طبیعی مدار باشد، یا ریشه دترمینان ماتریس ادمیتانس گره باشد. ماتریس ادمیتانس گره به‌صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} s+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{s} & -\frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} & s+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{R} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}$$

با قرار دادن $s=-۱$ در ماتریس ادمیتانس و محاسبه دترمینان آن داریم:

$$\det\begin{bmatrix} -۲+\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{R} \end{bmatrix}=۰ \Rightarrow -\frac{۳}{۲}(-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{R})-\frac{۱}{٤}=۰ \Rightarrow R=۳$$

لذا گزینه (٤) درست است.

حل ۲۳: جریان گذرنده از خازن برابر $i_C=\frac{dv_C}{dt}=-\sin t$ است. این جریان از مقاومت‌های خطی و غیرخطی می‌گذرد و ولتاژ آنها نیز به‌ترتیب برابر $v_۱=-R\sin t$ و $v_۲=\sin^۲ t$ است. پس توان تلف‌شده در مقاومت‌ها چنین است:

$$p=v_۱i+v_۲i=R\sin^۲ t-\sin^۳ t$$

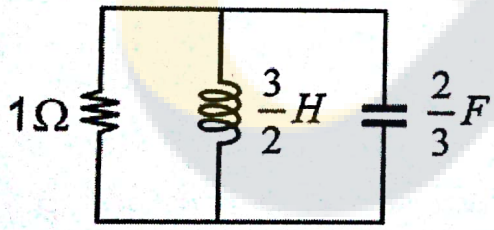
مقدار متوسط جمله اول برابر $\frac{R}{۲}$ و مقدار متوسط جمله دوم برابر صفر است. پس:

$\frac{R}{۲}=۱$ یا $R=۲$. لذا گزینه (۳) درست است.

حل ۲۴ : ابتدا توجه کنید که مدار دو حلقه سلفی و یک کات‌ست خازنی دارد. پس مدار سه فرکانس طبیعی صفر دارد. لذا یکی از گزینه‌های (۳) یا (٤) درست است.

ماتریس اندوکتانس سلف‌های تزویج‌شده برابر $L=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$ یا $\Gamma=L^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}$ است. اندوکتانس معکوس معادل از رابطه $\Gamma=\Gamma_۱+\Gamma_۲-۲\Gamma_{۱۲}=۱$ به‌دست می‌آید. پس $L=\frac{۱}{\Gamma}=۱$. یعنی سلف‌های تزویج‌شده معادل سلف ۱ هانری است که با سلف ۲ هانری سری و نتیجهٔ آن با سلف ۳ هانری موازی است. پس کلاً معادل سلف $\frac{۳}{۲}$ هانری است.

از سوی دیگر، منبع ولتاژ نقشی در فرکانس‌های طبیعی ندارد و می‌توان آن را اتصال کوتاه کرد. بنابراین دو خازن ۱ فارادی با هم موازی و حاصل با خازن ۱ فارادی دیگر سری است و بنابراین خازن معادل برابر $\frac{۲}{۳}$ فاراد است. درنتیجه مدار از یک مدار RLC موازی با مقادیر $R=۱$، $L=\frac{۳}{۲}$ و $C=\frac{۲}{۳}$ مطابق شکل مقابل تشکیل



می‌شود، که ادمیتانس آن برابر $\frac{۲}{۳s}+۱+\frac{۲}{۳}s$ یا $\frac{۲s^۲+۳s+۲}{۳s}$ است. صورت ادمیتانس نشان‌دهندهٔ معادله مشخصه است. لذا گزینه (٤) درست است.

حل ۲۵ : برای تعیین فرکانس تشدید s را با $j\omega$ تعویض می‌کنیم و جزء موهومی $Z_{in}(j\omega)$ را به‌دست آورده و برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$Z_{in}(j\omega)=\frac{j\omega+\alpha}{-\omega^۲+j٤\omega+۸}=\frac{(\alpha+j\omega)(۸-\omega^۲-j٤\omega)}{(۸-\omega^۲+j٤\omega)(۸-\omega^۲-j٤\omega)}$$

$$\operatorname{Im}Z(j\omega)=۰ \Rightarrow \omega(۸-\omega^۲)-٤\alpha\omega=۰$$

یا

$$۸-\omega^۲-٤\alpha=۰ \Rightarrow \omega^۲=۸-٤\alpha$$

$۸-٤\alpha$ باید مثبت باشد، پس α باید کوچکتر از ۲ باشد. لذا گزینه (۲) درست است.

حل ۲۶ : جریان گذرنده از مقاومت ٤ اهمی شکل (الف) به‌صورت زیر است:

$$I_1(s)=\frac{V(s)}{4}=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{s}-\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s+3}\right]=\frac{1}{4}\frac{7s+9}{s(s+1)(s+3)}$$

امپدانس اتصال موازی مقاومت یک اهمی و خازن $\frac{1}{2}$ فارادی برابر $\frac{2}{s+2}$ است، پس ولتاژ خروجی $V_{o1}(s)$ مدار شکل (الف) چنین است:

$$V_{o1}(s)=\frac{1}{2}\frac{7s+9}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

اکنون منبع ولتاژ $u(t)$ سری با مقاومت یک اهمی شکل (ب) را به‌صورت منبع جریان موازی با آن در نظر بگیرید. در این صورت، به موجب قضیه هم پاسخی ولتاژ خروجی $V_{o2}(s)=V_{o1}(s)$ خواهد بود، یعنی:

$$V_{o2}(s)=\frac{1}{2}\frac{7s+9}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

جریان گذرنده از مقاومت ۲ اهمی شکل (ب) چنین است:

$$I_2(s)=\frac{1}{4}\frac{7s+9}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

ولتاژ خروجی $V_2(s)$ شکل (ب) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$V_2(s)=I_2(s)(s+2)=\frac{1}{4}\frac{7s+9}{s(s+1)(s+3)}=\frac{1}{4}V_1(s)$$

$v_2(t)$ پس از عکس تبدیل لاپلاس‌گیری چنین به‌دست می‌آید:

$$v_2(t)=\frac{1}{4}(3-e^{-t}-2e^{-3t})u(t)$$

لذا گزینه (٤) درست است.

حل ۲۷ : چون توان متوسط مقاومت برابر ۲ وات و مقدار مقاومت نیز یک اهم است، پس مقدار مؤثر ولتاژ و جریان مقاومت برابر $\sqrt{2}$ بوده و مقدار حداکثر آن برابر ۲ است. جریان گذرنده از خازن برابر $j\omega CV$ یا $j2$ است. بنابراین جریان گذرنده از سلف چنین است:

$$j_L=j_R+j_C=2+j2$$

و ولتاژ دو سر سلف $V_L = j\omega L J_L = j۲\times۳(۲+j۲)$ یا $V_L = ۱۲(-۱+j۱)$ است. توان راکتیو سلف چنین است:

$$\frac{۱}{۲}V_L\bar{I}_L = \frac{۱}{۲}\times۱۲(-۱+j۱)(۲-j۲) = -۱۲(۱-j)^۲ = j۲٤$$

بنابراین توان راکتیو سلف ۲٤ ولت آمپر راکتیو است. چون منبع دارای توان راکتیو نامنفی است، پس مجموع توان‌های راکتیو خازن‌ها حداکثر برابر ۲٤- ولت آمپر راکتیو است.

لذا گزینه (۱) درست است.

حل ۲۸ : دو قطبی شکل (الف) در واقع یک ژیراتور است که توصیف آن چنین است: $V_۱ = \alpha I_۲$ و $V_۲ = -\alpha I_۱$. با نوشتن این معادلات به‌صورت توصیف پارامترهای انتقال دوقطبی به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} V_۱ \\ I_۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -\alpha \\ -\frac{۱}{\alpha} & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_۲ \\ -I_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow T_۱ = \begin{bmatrix} ۰ & -\alpha \\ -\frac{۱}{\alpha} & ۰ \end{bmatrix}$$

هنگامی‌که دو تا از چنین دوقطبی‌ها به‌صورت متوالی وصل شوند، ماتریس پارامترهای انتقال آن چنین خواهد بود:

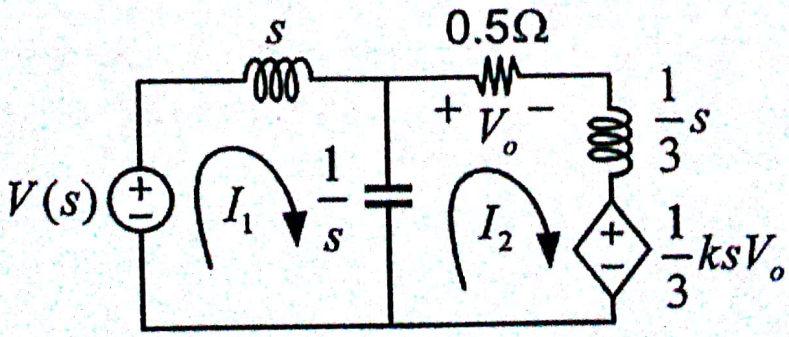
$$T = T_۱T_۱ = \begin{bmatrix} ۰ & -\alpha \\ -\frac{۱}{\alpha} & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & -\alpha \\ -\frac{۱}{\alpha} & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

از سوی دیگر، می‌دانیم وقتی که یک دوقطبی با پارامترهای انتقال به امپدانس $Z = s+۲$ ختم شود، امپدانس ورودی آن چنین خواهد بود:

$$Z_{in} = \frac{AZ+B}{CZ+D} = \frac{s+۲}{۱} = s+۲$$

لذا گزینه (٤) درست است.

حل ۲۹ : منبع جریان وابسته kv_o موازی با سلف $\frac{۱}{۳}$ هانری را به منبع ولتاژ سری با آن تبدیل می‌کنیم و مدار را در



حوزه s رسم می‌کنیم. معادلات مش این مدار چنین است:

$$\begin{bmatrix} s+\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{1}{3}s+\frac{1}{2}+\frac{1}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V(s) \\ -\frac{1}{3}ksV_o \end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه $V_o=\frac{1}{2}I_2$، جمله دوم بردار سمت راست را به سمت چپ می‌بریم و داریم:

$$\begin{bmatrix} s+\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{1}{3}s+\frac{1}{2}+\frac{1}{s}+\frac{1}{6}ks \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه مدار دترمینان ماتریس امپدانس مش است:

$$\Delta(s)=(s+\frac{1}{s})\left(\frac{1}{3}s+\frac{1}{2}+\frac{1}{s}+\frac{1}{6}k_s\right)-\frac{1}{s^2}=0$$

$$(2+k)s^4+3s^3+(8+k)s^2+3s=0$$

برای پایداری از معیار روث استفاده می‌کنیم.

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 2+k & 8+k \\ s^2 & 3 & 3 \\ s^1 & 24+3k & -6-3k \\ s^0 & 3 & \end{array}$$

برای پایداری در ستون اول تمام جملات باید مثبت باشند. بنابراین $2+k>0$ یا $k>-2$.

لذا گزینه (۳) درست است.

حل ۳۰: معادلات KVL را در دو مش مدار می‌نویسیم.

معادلهٔ مش سمت چپ:

$$v_2+\frac{di_1}{dt}+i_1+i_1-i_2+i_2=0$$

معادلهٔ مش سمت راست:

$$\frac{di_2}{dt}+i_2+v_1-i_2-i_1+i_2=0$$

با جایگزینی $v_1=\frac{di_1}{dt}$ و $v_2=\frac{di_2}{dt}$ و ساده کردن معادلات به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{di_1}{dt}+\frac{di_2}{dt}+2i_1=0 \qquad (1)$$

$$\frac{di_1}{dt}+\frac{di_2}{dt}+i_2-i_1=0 \qquad (2)$$

از تفریق معادله دوم از معادله اول به‌دست می‌آوریم: $3i_1-i_2=0$. یعنی جریان‌های سلف‌ها مستقل از هم نیست. بنابراین فقط یک متغیر حالت داریم. با جایگزینی $i_2=3i_1$ در معادله (۱) به‌دست می‌آوریم:

$$4\frac{di_1}{dt}+2i_1=0 \Rightarrow \frac{di_1}{dt}=-\frac{1}{2}i_1$$

بنابراین ماتریس A به‌صورت اسکالر $A=-\frac{1}{2}$ می‌باشد. از این رو گزینه (۱) درست است.

پاسخ درست سؤالات

زبان عمومی و تخصصی

****

شماره سؤال	پاسخ صحیح	شماره سؤال	پاسخ صحیح
۳۱	۳	٤٦	۱
۳۲	۱	٤۷	۳
۳۳	۲	٤۸	۳
۳٤	۱	٤۹	٤
۳۵	۱	۵۰	۲
۳٦	۲	۵۱	۱
۳۷	۲	۵۲	٤
۳۸	٤	۵۳	۳
۳۹	۳	۵٤	٤
٤۰	۳	۵۵	۱
٤۱	۱	۵٦	۲
٤۲	٤	۵۷	٤
٤۳	۲	۵۸	۳
٤٤	٤	۵۹	٤
٤۵	۳	٦۰	۱

حل سؤالات الکترومغناطیسی

****

حل ۶۱: معادلهٔ $\vec{r}\times\hat{x}=-5\hat{z}$ با توجه به آنکه $\vec{r}=x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}$ به دو معادله $y=5$ و $z=0$ تبدیل می شود که این دو معرف خطی هستند که به موازات محور x از نقطهٔ $(x,y,z)=(0,5,0)$ عبور می‌کند. چون چگالی بار روی این خط یکنواخت فرض شده است، میدان الکتریکی ناشی از آن به صورت $\vec{E}=\hat{\rho}\lambda/2\pi\varepsilon_0\rho$ داده می‌شود که در آن ρ فاصلهٔ نقطهٔ مشاهده از بار خطی یکنواخت و λ چگالی بار خطی می باشد که بر طبق صورت مسأله $\lambda=10^{-9}/36\pi$ کولن بر متر در نظر گرفته شده است. ضمناً $\hat{\rho}$ بردار واحد برای برداری است که از نزدیک ترین نقطهٔ بار خطی شروع و به نقطهٔ مشاهده ختم می شود. از آنجا که نقطهٔ مشاهده دارای مختصات $(x,y,z)=(2,5,4)$ است، فاصلهٔ آن از بار خطی $\rho=4$ متر خواهد بود. علاوه بر این، بردار شروع شده از بار خطی و ختم شده به نقطهٔ مشاهده در جهت $\hat{z}$ است، لذا $\hat{\rho}=\hat{z}$ و می‌توان نوشت $\vec{E}=\hat{z}\frac{1}{8\pi}$. پس جواب (٤) صحیح است.

حل ۶۲: برای محاسبهٔ اندازهٔ اندوکتانس متقابل $|M_{21}|$ (که با $|M_{12}|$ برابر است) باید نسبت

$$|M_{21}|=\left.\frac{|\Psi_{21}|}{|I_1|}\right|_{I_2=0}$$

تعیین شود که در آن $|\Psi_{21}|$ کل شار عبوری از مدار دوم به ازای $I_2=0$ است. می دانیم که

$$\Psi_{21}=\int_{S_2}\vec{B}_{21}\cdot d\vec{s}$$

که با در نظر گرفتن کوچکی بسیار زیاد مدار دوم به صورت $\Psi_{21}\approx\vec{B}_{21}\cdot\Delta\vec{S}_2$ ساده می شود که در آن $\vec{B}_{21}$ میدان مغناطیسی در مرکز مدار دوم ناشی از I_1 و $\Delta\vec{S}_2$ بردار سطح مدار دوم است. در اینجا $|\Delta\vec{S}_2|=\pi(b/100)^2$ داده شده است.

از سوی دیگر می دانیم که بر اساس قانون بیو - ساوار بردار میدان مغناطیسی در مرکز یک مدار دایروی به شعاع b بر سطح این دایره عمود بوده و دارای اندازهٔ $|\vec{B}_{21}| = \mu_0 |I_1| / 2b$ است. پس می‌توان نوشت:

$$|M_{21}| = \frac{|\vec{B}_{21} \cdot \Delta\vec{S}_2|}{|I_1|} = \frac{|\vec{B}_{21}||\Delta\vec{S}_2||\cos\theta_0|}{|I_1|} = \frac{\mu_0 |I_1| \pi (b/100)^2 |\cos\theta_0|}{2b|I_1|}$$

در رابطهٔ فوق از این نکته استفاده شده است که محور این دو حلقه با یکدیگر زاویهٔ θ_0 ساخته‌اند. پس جواب (٤) صحیح است. توجه کنید که چنانچه جهت جریان‌های I_1 و I_2 معلوم بود، می‌توانستیم علامت اندوکتانس متقابل M_{21} را نیز معیین کنیم.

حل ۶۳: ابتدا توجه کنید که اگر به جای یک نیمکره، یک کرهٔ کامل وجود داشت، آنگاه پتانسیل الکتریکی در نقطهٔ مورد نظر دو برابر می‌شد. با در نظر گرفتن همین نکته، پتانسیل الکتریکی را ابتدا برای یک کرهٔ کامل به شعاع a با چگالی ثابت ρ_0 کولن بر متر مکعب در فاصلهٔ a/2 از مرکز کره محاسبه کرده و این مقدار را نصف می‌کنیم. به عبارت ریاضی

$$\Phi\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{r=a/2}^{a} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell} + \Phi(a)\right)$$

بدیهی است که در رابطهٔ فوق $\Phi(a)$ پتانسیل الکتریکی کرهٔ کامل روی سطح خارجی آن بوده و $\vec{E}(\vec{r})$ نشان‌دهندهٔ میدان الکتریکی داخل این کره است. با توجه به تقارن کروی این توزیع بار، پتانسیل الکتریکی $\Phi(a)$ برحسب کل بار Q به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\Phi(a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{\rho_0 \frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} a^2$$

از سوی دیگر بر اساس قانون گاوس $\vec{E}(\vec{r})$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r\,\hat{r}$$

چون $d\vec{\ell} = dr\,\hat{r}$ لذا می‌توان نوشت:

$$\int_{r=a/2}^{a} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell} = \int_{r=a/2}^{a} \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r\,dr = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{\rho_0}{8\varepsilon_0} a^2$$

$$\Phi\left(\frac{a}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{\rho_o}{۸\varepsilon_o}a^۲+\frac{\rho_o}{۳\varepsilon_o}a^۲\right)=\frac{۱۱}{٤۸}\frac{\rho_o}{\varepsilon_o}a^۲$$

پس جواب (۱) صحیح است.

حل ۶۴: برای تعیین اندازهٔ پتانسیل برداری مغناطیسی $|\vec{A}|$ ابتدا چگالی جریان های معادل مغناطیس شدگی یعنی $\vec{J}_m(\vec{r})=\vec{\nabla}\times\vec{M}(\vec{r})$ و $\vec{K}_m(\vec{r})=\vec{M}(\vec{r})\times\hat{n}$ را بدست می‌آوریم. چون $\vec{M}(\vec{r})=Cr\hat{r}$ داده شده در صورت مسأله شعاعی بوده و فقط تابعی از r است، چرخش یا کرل آن در همهٔ نقاط صفر است، پس $\vec{J}_m(\vec{r})=۰$. همچنین $\vec{M}(\vec{r})$ بر سطوح جانبی آهنربای دائمی عمود است مگر بر سطح طوق شکل $a<r<b$ در صفحهٔ $z=۰$ روی این سطح $\hat{n}=-\hat{z}$ و بنا بر این چگالی جریان سطحی معادل $\vec{K}_m(\vec{r})$ فقط روی این سطح به صورت $\vec{K}_m=\vec{M}\times(-\hat{z})=Cr\hat{\varphi}$ بوده و در سایر نقاط سطح صفر است. حال که $\vec{K}_m=Cr\hat{\varphi}$ تنها عامل ایجاد $\vec{A}$ است، به جهت $\vec{K}_m$ و تقارن هندسی موجود در ساختار توجه کرده و به آسانی پی می‌بریم که $\vec{A}$ ناشی از $\vec{K}_m$ برای نقاط روی محور z دقیقاً صفر است. لذا جواب (٤) صحیح است.

حل ۶۵: میدان الکتریکی در محل $(x,y,z)=(۰,۰,z)$ ناشی از یک جزء دیفرانسیلی از این حلقه که در محل $(x',y',z')=(a\cos\varphi',a\sin\varphi',۰)$ در سمت $y'>۰$ یعنی به ازای $۰<\varphi'<\pi$ قرار گرفته است، برابر است با

$$d\vec{E}_۱=\frac{dq}{٤\pi\varepsilon_o R^۳}\vec{R}=\frac{q\,a\,d\varphi'}{٤\pi\varepsilon_o\left(a^۲+z^۲\right)}\hat{r}_۱$$

که در آن $\hat{r}_۱$ بردار واحد برای بردار $\vec{R}$ است. بدیهی است که $\vec{R}$ برداری است که از نقطهٔ منبع به نقطهٔ مشاهده $(x,y,z)=(۰,۰,z)$ کشیده می شود یعنی برداری با مؤلفه های $\vec{R}=(x-x')\hat{x}+(y-y')\hat{y}+(z-z')\hat{z}$. بدین ترتیب $\hat{r}_۱$ برابر است با

$$\hat{r}_۱=\frac{۱}{\sqrt{a^۲+z^۲}}\left(-a\cos\varphi'\,\hat{x}-a\sin\varphi'\,\hat{y}+z\,\hat{z}\right)$$

برای یک جزء دیفرانسیلی از این حلقه که در محل $(x',y',z')=(a\cos\varphi',-a\sin\varphi',۰)$ در سمت $y'<۰$ واقع است، جزء میدان الکتریکی با رابطهٔ

$$d\vec{E}_2 = \frac{-q\,a\,d\varphi'}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2+z^2\right)}\hat{r}_2$$

داده می شود که در آن $\hat{r}_2$ به صورت زیر می باشد:

$$\hat{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\left(-a\cos\varphi'\,\hat{x} + a\sin\varphi'\,\hat{y} + z\,\hat{z}\right)$$

توجه شود که $d\vec{E}_2$ به صورت بالا برای $0<\varphi'<\pi$ معتبر است. حال می توان جزء میدان کل $d\vec{E}$ ناشی از این دو جزء دیفرانسیلی را محاسبه کرد:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = -\frac{q\,a\,d\varphi'}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2+z^2\right)}\frac{2a\sin\varphi'}{\sqrt{a^2+z^2}}\hat{y}$$

$$\vec{E}(0,0,z) = \int d\vec{E} = -\int_{\varphi'=0}^{\pi}\frac{q\,a\,d\varphi'}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2+z^2\right)}\frac{2a\sin\varphi'}{\sqrt{a^2+z^2}}\hat{y}$$

$$\vec{E}(0,0,z) = -\frac{qa^2}{\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{y}$$

پس اندازهٔ میدان $\left|\vec{E}(0,0,z)\right|$ با جواب (۳) برابر است.

حل ۶۶: فرض کنید محور حلقهٔ بار بر محور z منطبق باشد. برای جابجائی بسیار کوچک یعنی هنگامی که بار نقطه‌ای q- در محل $(0,0,z)$ با فرض $z<<a$ قرار دارد، نیروی وارد بر بار نقطه‌ای $\vec{F}(z) = -q\vec{E}(0,0,z)$ است که در آن $\vec{E}(0,0,z)$ میدان الکتریکی ناشی از حلقهٔ بار در محل $(0,0,z)$ می‌باشد. به دلیل تقارن، این میدان در جهت $\hat{z}$ بوده و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{E}(0,0,z) = \hat{z}\int_{\varphi'=0}^{2\pi}\frac{\lambda a\,d\varphi'}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2+z^2\right)}\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} = \hat{z}\frac{\lambda a}{2\varepsilon_0}\frac{z}{\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}$$

طبق فرض مسأله $z<<a$ پس نیروی وارد بر بار نقطه‌ای برابر است با:

$$\vec{F}(z) = -q\vec{E}(0,0,z) \approx -\hat{z}\,q\frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\frac{z}{a^2}$$

با استفاده از رابطهٔ

$$\vec{F}(z) = \hat{z}\,m\frac{d^2}{dt^2}z$$

بدست می‌آوریم

$$\frac{d^2}{dt^2}z+\omega^2 z=0$$

که در آن

$$\omega^2=\frac{q\lambda}{2m\varepsilon_0 a^2}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi a\sqrt{\frac{8m\varepsilon_0}{q\lambda}}$$

پس جواب (۲) صحیح است.

حل ۶۷: ابتدا چگالی بارهای حجمی و سطحی معادل پلاریزاسیون را برای $r<a$ بدست می‌آوریم:

$$\rho_b=-\vec{\nabla}\cdot\vec{P}(r)=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP_r)=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(1-\frac{r}{a}\right)\right)=-\frac{1}{r}+\frac{2}{a}$$

$$\rho_{sb}=\vec{P}\cdot\hat{n}\Big|_{r=a}=\vec{P}(a)\cdot\hat{r}=0$$

در اثر دوران، ρ_b جریان حجمی با چگالی $\vec{J}=\rho_b\vec{v}$ ایجاد می‌کند که در آن $\vec{v}=r\omega\hat{\varphi}$ زیرا که چرخش در جهت مثلثاتی بوده است. با در نظر گرفتن جهت $\vec{J}$ و تقارن‌های ساختار می‌دانیم که $\vec{H}(r)=H_z(r)\hat{z}$ پس با استفاده از قانون آمپر می‌نویسیم:

$$\vec{\nabla}\times\left(H_z(r)\hat{z}\right)=-\frac{\partial}{\partial r}H_z(r)\hat{\varphi}=\vec{J}(r)=\omega\left(\frac{2r}{a}-1\right)\hat{\varphi}$$

با انتگرالگیری از طرفین از r تا a^+ می‌توان $H_z(r)$ را بدست آورد. توجه شود که همانند یک سولنوئید بی‌نهایت طویل $H_z(r)$ برای $r>a$ صفر خواهد بود یعنی $H_z(a^+)=0$.

بنابراین می‌توان نوشت:

$$-\int_r^{a^+}\frac{\partial}{\partial r}H_z(r)\,dr=-H_z(a^+)+H_z(r)=\omega\int_r^{a^+}\left(\frac{2r}{a}-1\right)dr$$

پس بدست می‌آوریم:

$$\vec{H}=\hat{z}H_z(r)=\hat{z}\omega\int_r^{a^+}\left(\frac{2r}{a}-1\right)dr=\hat{z}\omega\left(\frac{a^2-r^2}{a}-(a-r)\right)=\hat{z}\omega r\left(1-\frac{r}{a}\right)$$

لذا جواب (۳) درست است.

حل ۶۸: چگالی انرژی مغناطیسی در محیط i به صورت $\vec{H}_i \cdot \vec{B}_i / ۲$ محاسبه می‌شود که در آن $i = 1,2$. حال دو شرط مرزی مربوط به این مسأله را مورد استفاده قرار می‌دهیم:

$$\hat{n} \times (\vec{H}_۱ - \vec{H}_۲) = ۰ \Rightarrow |\vec{H}_۱| \sin(۴۵^\circ) = |\vec{H}_۲| \sin(۳۰^\circ) \Rightarrow \sqrt{۲}|\vec{H}_۱| = |\vec{H}_۲|$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_۱ - \vec{B}_۲) = ۰ \Rightarrow |\vec{B}_۱| \cos(۴۵^\circ) = |\vec{B}_۲| \cos(۳۰^\circ) \Rightarrow \sqrt{۲}|\vec{B}_۱| = \sqrt{۳}|\vec{B}_۲|$$

$$\frac{\frac{۱}{۲}\vec{H}_۲ \cdot \vec{B}_۲}{\frac{۱}{۲}\vec{H}_۱ \cdot \vec{B}_۱} = \frac{|\vec{H}_۲||\vec{B}_۲|}{|\vec{H}_۱||\vec{B}_۱|} = \frac{۲}{\sqrt{۳}} > ۱$$

توجه شود که در محاسبات بالا هر دو محیط ایزوترپ فرض شده‌اند یعنی $\vec{H}_i \parallel \vec{B}_i$. پس جواب (۲) صحیح است.

حل ۶۹: ابتدا تابع پتانسیل الکتریکی را در دو طرف توزیع بار محاسبه می‌کنیم. فرض کنید $\Phi_۱(x,y)$ و $\Phi_۲(x,y)$ به ترتیب تابع پتانسیل الکتریکی برای $y > ۰$ و $y < ۰$ باشد. براساس شرط مرزی $\hat{n} \cdot (\vec{D}_۱ - \vec{D}_۲)\big|_{y=۰} = \rho_S(x)$ که در آن $\hat{n} = \hat{y}$ است، داریم:

$$\left(-\varepsilon_۰ \frac{\partial}{\partial y}\Phi_۱ + \varepsilon_۰ \frac{\partial}{\partial y}\Phi_۲\right)\Bigg|_{y=۰} = \sigma \cos(\beta x)$$

با توجه به شرط بالا و با توجه به آنکه توابع پتانسیل باید حل معادلهٔ لاپلاس $\vec{\nabla}^۲ \Phi_i(x,y) = ۰$ باشند، می‌توان این توابع را به صورت زیر بیان کرد:

$$\Phi_۱(x,y) = A\exp(-\beta y)\cos(\beta x) \quad , \quad \Phi_۲(x,y) = A\exp(+\beta y)\cos(\beta x)$$

در عبارت‌های بالا علامت توابع نمائی با در نظر گرفتن میرا شدن تابع پتانسیل یعنی اعمال شرط مرزی در بی‌نهایت انتخاب شده‌اند. (تعیین ضریب A برای حل این مسأله ضرورت ندارد ولی براساس شرط مرزی فوق الذکر مقدار آن برابر است با $A = \sigma / ۲\varepsilon_۰\beta$. ضمناً از خود بپرسید چرا ضریب A برای هر دو تابع پتانسیل یکسان فرض شده است.) اگر در ناحیهٔ $y > ۰$ معادلهٔ خطوط میدان الکتریکی $y(x)$ باشد، لازم است تا:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y(x,y)}{E_x(x,y)} = \frac{-\frac{\partial}{\partial y}\Phi_۱(x,y)}{-\frac{\partial}{\partial x}\Phi_۱(x,y)} = \frac{A\beta\exp(-\beta y)\cos(\beta x)}{A\beta\exp(-\beta y)\sin(\beta x)}$$

این معادلهٔ دیفرانسیل را با انتگرالگیری از طرفین حل می‌کنیم، یعنی:

$$\int dy = \frac{1}{\beta}\int \frac{\beta\cos(\beta x)}{\sin(\beta x)}dx \Rightarrow y = \frac{1}{\beta}\ln|\sin(\beta x)| + C \Rightarrow e^{-\beta y}|\sin(\beta x)| = \text{const.}$$

پس جواب (۱) صحیح می‌باشد.

حل ۷۰: در پی به حرکت در آمدن ورقهٔ رسانا در میدان مغناطیسی، جریان با چگالی $\vec{J}$ در آن القاء شده و جزء نیروی وارد بر جزء حجم دیفرانسیلی dv ورقه به مقدار $d\vec{F} = \vec{J}\times\vec{B}\,dv$ خواهد رسید. از طرف دیگر، رابطهٔ $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ در درون ورقهٔ رسانا برقرار است و بنابراین جزء نیروی وارد بر ورقه پس از جمع کردن نیروهای دیفرانسیلی در پهنای ورقه به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\Delta\vec{F} = \int_0^w \sigma\vec{E}\times\vec{B}\ \Delta A\, d\ell = \sigma\vec{E}\times\vec{B}\, w\Delta A \Rightarrow \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta A} = \sigma\, w\, \vec{E}\times\vec{B}$$

توجه کنید که این نیرو در خلاف جهت حرکت ورقه بوده و مقدار آن ثابت است. در رابطهٔ بالا ΔA جزء سطح عمود بر پهنای ورقه می باشد. ضمناً میدان الکتریکی $\vec{E}$ القاء شده در درون ورقه در جهت $\vec{J}$ بوده لذا بر $\vec{B}$ عمود است. اندازهٔ این میدان الکتریکی ثابت و برابر $|\vec{B}||\vec{v}|$ است زیرا که کل اختلاف پتانسیل در پهنای ورقه $|\vec{B}||\vec{v}|w$ است. با منظور کردن تعامد $\vec{E}$ بر $\vec{B}$ بدست می‌آوریم:

$$\frac{|\Delta\vec{F}|}{\Delta A} = \sigma\, w|\vec{B}||\vec{v}||\vec{B}| = \sigma\, w|\vec{v}||\vec{B}|^2$$

لذا جواب (۲) درست است.

حل ۷۱: انرژی ذخیره شده در محیط اطراف کره در حالت اول $W_1 = Q_1V_0/2$ است که در آن $Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 aV_0$ می‌باشد. در حالت دوم داریم $W_2 = Q_2V_2/2$ اما طبق فرض مسأله بار کره در دو حالت یکسان است پس $Q_2 = Q_1$ و فقط باید V_2 را محاسبه کنیم. برای محاسبهٔ V_2 ابتدا میدان الکتریکی در حالت دوم را بدست می‌آوریم. به دلیل تقارن کروی فرض شده برای ضریب گذردهی محیط دوم، می توانیم بنویسیم $\vec{\nabla}\times\vec{D} = 0$ و به دنبال آن $\vec{D}$ را در محیط دوم به‌صورت

$$\vec{D}=\frac{A}{r^{2}}\hat{r}$$

نمایش دهیم. حال میدان الکتریکی از رابطهٔ $\vec{E}=\vec{D}/\varepsilon$ و V_{2} از انتگرال $\vec{E}$ به شکل زیر بدست می‌آید:

$$V_{2}=\int_{r=a}^{\infty}E_{r}(r)dr=\int_{r=a}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon_{o}\left(1+\frac{a^{2}}{r^{2}}\right)}\frac{A}{r^{2}}dr$$

$$V_{2}=\frac{A}{a\varepsilon_{o}}\int_{r=a}^{\infty}\frac{a}{r^{2}+a^{2}}dr=\frac{A}{a\varepsilon_{o}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{r}{a}\right)\right]_{a}^{\infty}=\frac{\pi A}{4a\varepsilon_{o}}$$

از سوی دیگر برای تأمین شرط $Q_{2}=Q_{1}$ لازم است تا

$$\oint\vec{D}\cdot d\vec{s}=\frac{A}{a^{2}}4\pi a^{2}=Q_{1}=4\pi\varepsilon_{o}aV_{o}\quad\Rightarrow A=\varepsilon_{o}aV_{o}$$

پس اختلاف انرژی $\Delta W=W_{2}-W_{1}$ برابر است با:

$$\Delta W=\frac{1}{2}(V_{2}-V_{1})Q_{1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}V_{o}-V_{o}\right)4\pi\varepsilon_{o}aV_{o}=\left(\frac{\pi}{4}-1\right)2\pi\varepsilon_{o}aV_{o}^{2}$$

پس جواب (۱) صحیح است.

حل ۷۲: در اینجا می‌توان $\vec{H}$ را به کمک چگالی بارهای مجازی مغناطیسی یعنی $\rho_{m}=-\vec{\nabla}\cdot\vec{M}$ و $\rho_{sm}=\vec{M}\cdot\hat{n}$ بدست آورد. برای $\vec{M}=M_{o}\hat{z}$ فقط ρ_{sm} برای $z=L$ و $z=0$ به ازای $L/2<r<L$ غیر صفر و به ترتیب برابر $+M_{o}$ و $-M_{o}$ است. چون این بارهای مجازی سطحی قرینه بوده و نقطهٔ مشاهده P در وسط قرار دارد، می‌توان $\vec{H}$ ناشی از ρ_{sm} واقع در $z=0$ را محاسبه و سپس نتیجه را دو برابر کرد. می‌دانیم که برای یک دیسک کامل به شعاع a و چگالی بار سطحی مجازی مغناطیسی σ_{m}، شدت میدان مغناطیسی روی محور دیسک و در بالای آن در فاصلهٔ z از مرکز دیسک با رابطهٔ

$$\vec{H}(z)=\hat{z}\frac{\sigma}{2}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^{2}+a^{2}}}\right)$$

داده می‌شود. براساس این نتیجه، و با استفاده از جمع آثار، چگالی بارهای مجازی سطحی واقع در $z=0$ شدت میدان مغناطیسی

$$\vec{H}_1 = \hat{z}\frac{-M_o}{2}\left(1-\frac{L/2}{\sqrt{\frac{L^2}{4}+L^2}}\right)-\hat{z}\frac{-M_o}{2}\left(1-\frac{L/2}{\sqrt{\frac{L^2}{4}+\frac{L^2}{4}}}\right)=\hat{z}\frac{M_o}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

را تولید می‌کنند. پس از دو برابر کردن $\vec{H}_1$ میدان مغناطیسی $\vec{B}$ به شرح ذیل بدست می‌آید:

$$\vec{B}=\mu_o\vec{H}=\mu_o 2\vec{H}_1=\hat{z}\mu_o M_o\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$$

بنابر این جواب (۳) درست است.

حل ۷۳: از آنجا که کل جریان عبوری از ساختار نسبت به z بدون تغییر است، چگالی جریان حجمی باید از z و φ مستقل باشد، به عبارت دیگر $\vec{J}=J_r(r)\hat{r}+J_z(r)\hat{z}$. اما باید $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$ برقرار باشد، پس

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rJ_r(r)\right)+\frac{\partial}{\partial z}J_z(r)=0 \Rightarrow J_r(r)=\frac{A}{r}$$

چون باید $J_r(a)=0$ پس $A=0$، لذا $\vec{J}=J_z(r)\hat{z}$. حال میدان الکتریکی را بدست می‌آوریم:

$$\vec{E}=\frac{\vec{J}}{k\left(1+\frac{z}{h}\right)\left(1+\frac{r}{a}\right)}=\frac{J_z(r)}{k\left(1+\frac{z}{h}\right)\left(1+\frac{r}{a}\right)}\hat{z}$$

اما باید $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$ در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\vec{\nabla}\left(\frac{J_z(r)}{k\left(1+\frac{z}{h}\right)\left(1+\frac{r}{a}\right)}\right)\times\hat{z}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{J_z(r)}{k\left(1+\frac{z}{h}\right)\left(1+\frac{r}{a}\right)}\right)\hat{r}\times\hat{z}=0$$

پس باید

$$J_z(r)=C\left(1+\frac{r}{a}\right)$$

که در آن C ثابتی است که باید به صورت زیر تعیین شود:

$$I=\int\vec{J}\cdot d\vec{s}=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{a}J_z(r)rdrd\varphi=2\pi C\left(\frac{a^2}{2}+\frac{1}{a}\frac{a^3}{3}\right)=\frac{5}{3}\pi Ca^2\Rightarrow C=\frac{3}{5\pi a^2}I$$

حال اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت را بدست می‌آوریم:

$$V=\int_{z=0}^{h}E_z(z)dz=\frac{C}{k}\int_{0}^{h}\frac{dz}{1+\frac{z}{h}}=\frac{Ch}{k}\left[\ln|z+h|\right]_0^h=\frac{Ch}{k}\ln 2$$

بنابراین:

$$R=\frac{V}{I}=\frac{3}{5\pi a^2}\frac{h}{k}\ln 2$$

لذا جواب (۱) درست است.

حل ۷۴: میدان الکتریکی در این ساختار می‌تواند به صورت $\vec{E}=E_z(z)\hat{z}$ باشد که در این صورت $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$ تأمین شده است. حال لازم است تا بردار چگالی شار الکتریکی $\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$ در شرط $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0$ صدق کند، یعنی:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_0\varepsilon_r(z)\vec{E}\right)=0\Rightarrow\vec{\nabla}\left(\varepsilon_r(z)E_z(z)\right)\cdot\hat{z}=0\Rightarrow\frac{d}{dz}\left(\varepsilon_r(z)E_z(z)\right)=0$$

$$\Rightarrow E_z(z)=\frac{K}{1+a^2z^2}$$

که در آن K یک ثابت است. اکنون ظرفیت خازن برابر است با

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{\int_A\vec{D}\cdot d\vec{s}}{\int_{z=0}^{h}E_z(z)dz}=\frac{\varepsilon_0KA}{K\int_0^h\frac{dz}{1+a^2z^2}}=\frac{\varepsilon_0A}{\frac{1}{a}\left[\tan^{-1}(az)\right]_0^h}=\frac{\varepsilon_0aA}{\tan^{-1}(ah)}$$

پس جواب (۲) صحیح است.

حل ۷۵: چون باید رابطهٔ $\vec{B}=\mu_0\vec{H}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ برقرار باشد، پس باید داشته باشیم:

$$\mu_0\vec{H}=\mu_0\exp(-bx)\left(3\sin(2y)\hat{x}+a\cos(2y)\hat{y}\right)=\hat{x}\frac{\partial}{\partial y}A_z-\hat{y}\frac{\partial}{\partial x}A_z$$

برابری مؤلفهٔ $\hat{x}$ به تساوی زیر منجر می‌شود:

$$\mu_0 3\exp(-bx)\sin(2y)=\frac{\partial}{\partial y}A_z\Rightarrow A_z=-\mu_0\frac{3}{2}\exp(-bx)\cos(2y)+c_1(x)$$

اکنون از این نتیجه در تساوی مربوط به مؤلفهٔ $\hat{y}$ یعنی در

$$\mu_o a \exp(-bx)\cos(۲y) = -\frac{\partial}{\partial x}A_z$$

استفاده می‌کنیم:

$$\mu_o a \exp(-bx)\cos(۲y) = -\mu_o \frac{۳}{۲} b \exp(-bx)\cos(۲y) - c_۱'(x)$$

پس باید $c_۱'(x) = ۰$ یعنی $c_۱(x) = c$ و $a = -۳b/۲$. از سوی دیگر، چون برای $\vec{A}$ داده شده داریم $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = ۰$ پس لازم است تا $\vec{\nabla}^۲ A_z(x,y) = ۰$ نیز برقرار شود، یعنی:

$$\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}A_z + \frac{\partial^۲}{\partial y^۲}A_z = ۰ \Rightarrow b^۲ - ٤ = ۰ \Rightarrow b = \pm ۲$$

با انتخاب $b = ۲$ پتانسیل برداری مغناطیسی میرا خواهد شد. (بدین ترتیب ثابت a برابر -۳ بدست خواهد آمد، هر چند که مقدار آن مورد نیاز نیست.) در نهایت داریم:

$$A_z = -\mu_o \frac{۳}{۲}\exp(-۲x)\cos(۲y) + c$$

پس جواب (٤) درست است.

حل سؤالات الکترونیک

****

حل ۷۶:

با توجه به شکل مدار می‌توان نوشت:

$$I_o = \frac{\frac{V_۱ - V_{BE۱} - V_{BE۲}}{۲k\Omega}\times ۱k\Omega + V_{BE۱} + V_{BE۲} - V_{BE۳}}{۱k\Omega} \Rightarrow$$

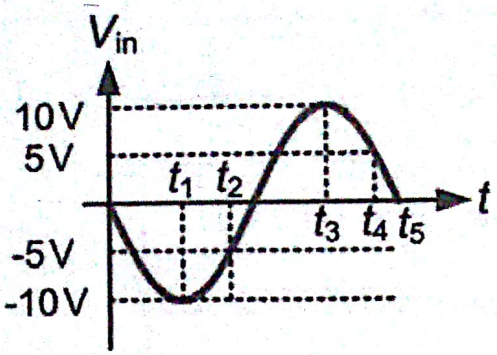
$$I_o = \frac{V_۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\left(V_{BE۱} + V_{BE۲} - ۲V_{BE۳}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial I_o}{\partial T} = \frac{\partial V_۱}{۲\partial T} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial V_{BE۱}}{\partial T} + \frac{\partial V_{BE۲}}{\partial T} - ۲\frac{\partial V_{BE۳}}{\partial T}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial I_o}{\partial T} = \frac{۱}{۲}\frac{\partial V_۱}{\partial T} = ۲,۵\frac{\mu A}{°C}$$

لذا جواب (۳) درست است.

حل ۷۷:



اگر سیگنال ورودی V_{in} را مطابق شکل زیر به بازه‌های زمانی مختلف تقسیم کنیم، در این صورت می‌توان نوشت:

وقتی $0 \le t \le t_1$ است؛ دیود روشن بوده و ولتاژ خروجی صفر است و خازن C با ولتاژ ورودی V_{in} شارژ می‌گردد. در حالتی که $t_1 \le t \le t_2$ است، دیود خاموش بوده و ولتاژ خروجی سیگنال ورودی V_{in} را دنبال می‌کند. در حالت $t_2 \le t \le t_3$ دیود در حالت زنری قرار می‌گیرد و ولتاژ خروجی برابر با ۵ ولت است. وقتی که $t_3 \le t \le t_4$ است، دیود خاموش بوده و ولتاژ خروجی دوباره سیگنال ورودی V_{in} را دنبال می‌کند. در حالت $t_4 \le t \le t_5$ دیود روشن شده و ولتاژ خروجی برابر با صفر ولت می‌گردد. لذا جواب (۲) درست است.

حل ۷۸:

به دلیل ایده‌آل بودن تقویت‌کننده‌ها، ولتاژ ترمینال ورودی دیگر آنها به ترتیب برابر با V_{i1} و V_{i2} هستند. بنابراین با نوشتن KCL در ترمینال ورودی تقویت‌کننده‌ها داریم:

$$\frac{V_{i1}-V_{i2}}{R}+\frac{V_{i1}}{R}+\frac{V_{i1}-V_{o2}}{R}=0$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{V_{i2}-V_{i1}}{R}+\frac{V_{i2}-V_{o2}}{R}+\frac{V_{i2}-V_{o}}{R}=0$$

$$2\frac{V_{i2}-V_{i1}}{R}+2\frac{V_{i2}-V_{i1}}{R}-\frac{V_{o}}{R}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_{o}}{V_{i2}-V_{i1}}=4$$

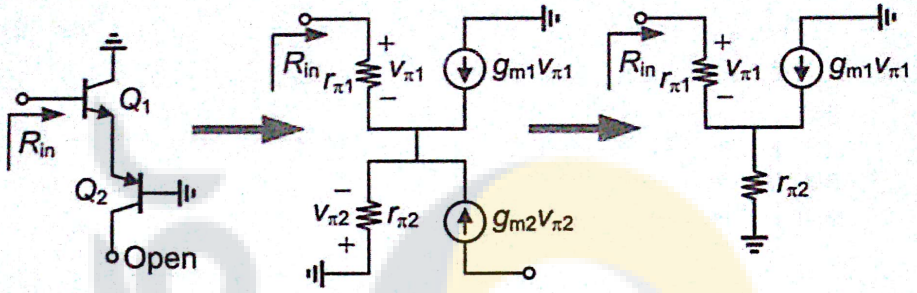
لذا جواب (٤) درست است.

حل ۷۹:

با توجه به مدار معادل سیگنال کوچک شکل زیر مقاومت دیده شده از امیتر ترانزیستور Q_1 برابر با $r_{\pi 2}$ است. این امر به دلیل ایده‌آل در نظر گرفتن منبع جریان I_b اتفاق می‌افتد.

بنابراین با استفاده از قانون انعکاس بیس برای ترانزیستور Q_1 می‌توان نوشت:

$$R_{in}=r_{\pi 1}+(\beta+1)r_{\pi 2}=(\beta+2)r_{\pi}$$



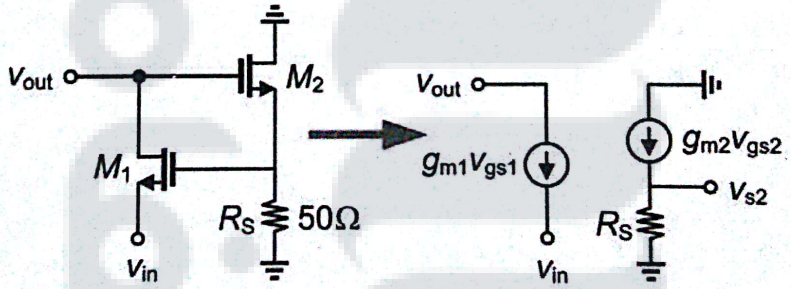
لذا جواب (٤) درست است.

حل ۸۰:

با توجه به این که درین ترانزیستور M_1 از نظر سیگنال کوچک باز است؛ جریان سیگنال کوچک درین آن برابر با صفر بوده و لذا ولتاژ ac گیت- سورس آن نیز صفر است. از طرفی با توجه به مدار معادل سیگنال کوچک شکل زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{v_{s۲}}{R_S} = g_{m۲} v_{gs۲}, \quad v_{gs۲} = v_{out} - v_{s۲}, \quad v_{s۲} = v_{in} \quad \Rightarrow$$

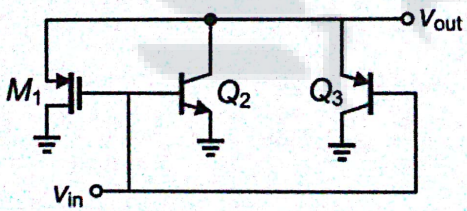
$$A_v = \frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{۱ + g_{m۲} R_S}{g_{m۲} R_S} = ٦$$



لذا جواب (٤) درست است.

حل ۸۱:

با نوشتن KCL در گره خروجی مدار معادل ac شکل زیر داریم:



$$g_{m۲}v_{in} - g_{m۱}\left(v_{in} - v_{out}\right) - g_{m۳}\left(v_{in} - v_{out}\right) = ۰ \quad \Rightarrow$$

$$A_v = \frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{-g_{m۲} + g_{m۱} + g_{m۳}}{g_{m۱} + g_{m۳}} = -٤$$

لذا جواب (۳) درست است.

حل ۸۲:

از نظر ورودی تفاضلی امیتر ترانزیستورهای $Q_۱$ و $Q_۲$ زمین بوده و لذا بهره ولتاژ تفاضلی آن به صورت $A_d = ۰/۵g_{m۲}R_C$ بدست می‌آید. در حالت مد- مشترک مقاومت دیده شده از درین $Q_۳$ در محاسبه بهره ولتاژ تاثیر زیادی خواهد داشت. مقدار این مقاومت به صورت $R_{SS} = r_{d۳} + \left(۱ + g_{m۳}r_{d۳}\right)R_S$ است. بنابراین بهره ولتاژ مد- مشترک برابر با $A_{cm} = -\frac{\alpha R_C}{۲R_{SS} + r_{e۲}}$ است. لذا مقدار CMRR به صورت زیر است:

$$CMRR = \left|\frac{A_d}{A_{cm}}\right| = \frac{۰/۵g_{m۲}R_C}{\frac{\alpha R_C}{۲R_{SS} + r_{e۲}}} = \frac{۰/۵g_{m۲}\left(۲R_{SS} + r_{e۲}\right)}{\alpha} \quad \Rightarrow$$

$$CMRR = \frac{(\beta + ۱)R_{SS}}{r_{\pi۲}} \simeq ۸۵٦۵$$

لذا جواب (٤) درست است.

حل ۸۳:

با تحلیل DC مدار، مقدار پارامترهای سیگنال کوچک آن به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$g_{m۱,۲} = \frac{I_{C۱}}{V_T} \simeq ٤۰mA/V,\ r_{\pi۱,۲} = \frac{\beta V_T}{I_{C۱}} \simeq ۲/۵k\Omega,\ r_{e۱,۲} = \frac{V_T}{I_{E۱}} = ۲۵\Omega$$

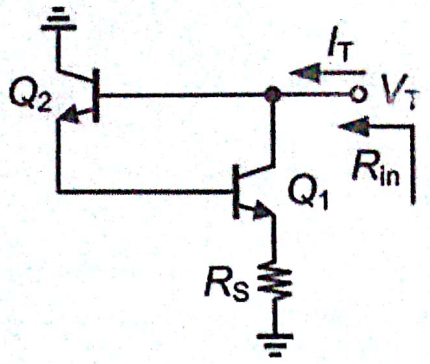
$$g_{m۳} = \frac{I_{C۳}}{V_T} \simeq ۲۰mA/V,\ r_{\pi۳} = \frac{\beta V_T}{I_{C۳}} \simeq ۵k\Omega,\ r_{e۳} = \frac{V_T}{I_{E۳}} = ۵۰\Omega$$

از طرفی مقدار بهره ولتاژ آن برابر است با:

$$A_v = g_{m۱}R_L + \frac{r_{\pi۲} + (\beta + ۱)\times ۲۵\Omega}{r_{\pi۲} + (\beta + ۱)\times ۲۵\Omega + r_{e۳}} \times \frac{R_L}{r_{e۲} + ۲۵\Omega} = ۱۱۹/٦$$

لذا جواب (۲) درست است.

حل ۸۴:



برای محاسبه فرکانس قطع کافی است که مقاومت دیده شده از دو سر خازن C_1 را محاسبه کنیم. ابتدا مقاومت دیده شده از کلکتور ترانزیستور Q_1 را محاسبه می‌کنیم. مطابق شکل زیر می‌توان نوشت:

$$I_T = i_{c1} + i_{b2} = i_{c1} + \frac{i_{c1}}{\beta(\beta+1)} \simeq i_{c1}$$

$$V_T = r_{\pi 2} i_{b2} + r_{\pi 1} i_{b1} + (\beta+1) i_{b1} R_S = r_{\pi 2} \frac{i_{b1}}{\beta+1} + r_{\pi 1} i_{b1} + (\beta+1) i_{b1} R_S$$

$$\Rightarrow \quad R_{in} = \frac{V_T}{I_T} \simeq \frac{r_{\pi 2}}{\beta(\beta+1)} + \frac{r_{\pi 1}}{\beta} + \frac{(\beta+1)R_S}{\beta}$$

از طرفی با تحلیل DC مدار مقدار پارامترهای سیگنال کوچک آن به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$r_{\pi 1} = \frac{\beta V_T}{I_{C1}} \simeq 2/5\,k\Omega, \quad r_{\pi 2} = \frac{\beta V_T}{I_{C2}} \simeq 250\,k\Omega$$

بنابراین مقاومت دیده شده از دو سر خازن C_1 برابر با $R_{C1} = R_{in} + R_L = 200\,\Omega$ بوده و در نتیجه مقدار فرکانس قطع به صورت $\omega_L = \frac{1}{R_{C1} C_1} = 1\,krad/s$ بدست می‌آید. لذا جواب (۲) درست است.

حل ۸۵:

ولتاژ خروجی V_o برابر با $V_o = 2(V_z + V_{BE3}) = 10\,V$ بوده و ماکزیمم جریان بار R_L یک آمپر است. لذا ماکزیمم جریان گذرنده از ترانزیستور Q_1 تقریباً یک آمپر بوده و حداکثر افت ولتاژ دو سر آن ۱۰ ولت است. بنابراین حداکثر توان مصرفی آن ۱۰ وات خواهد بود. لذا جواب (۳) درست است.

حل ۸۶:

ولتاژ بیس- امیتر ترانزیستورهای $Q_۱$ و $Q_۲$ با هم برابر هستند؛ بنابراین جریان کلکتور $Q_۱$ ۱۰ درصد بیشتر از $Q_۲$ خواهد بود، یعنی $I_{C۱} = ۱٫۱ I_{C۲}$. با توجه به شکل مدار می‌توان نوشت:

$$I_{C۱} = ۱٫۱ I_{C۲} \;,\; I_{C۱} + I_{C۲} \simeq ۲\,mA \;\Rightarrow\; I_{C۱} = ۱٫۰۴۸\,mA \;,\; I_{C۲} = ۰٫۹۵۲\,mA$$

$$R_{X۱} = R_{X۲} = ۰٫۵ R_X \;\Rightarrow\; V_o = (R + ۰٫۵R_X) I_{C۱} - (R + ۰٫۵R_X) I_{C۲} = ۰٫۲\,V$$

از طرفی برای صفر شدن ولتاژ خروجی لازم است که:

$$V_o = (R + R_{X۱}) I_{C۱} - (R + R_{X۲}) I_{C۲} = ۰ \;\Rightarrow$$

$$(R + ۰٫۵R_X - \Delta R) I_{C۱} - (R + ۰٫۵R_X + \Delta R) I_{C۲} = ۰$$

$$\Rightarrow\; \Delta R I_{C۱} + \Delta R I_{C۲} = ۰٫۲\,V \;\Rightarrow\; \Delta R = ۰٫۱\,k\Omega \;\Rightarrow$$

$$\frac{R_{X۱}}{R_X} = \frac{۰٫۵R_X - \Delta R}{R_X} = ۰٫۴۵$$

لذا جواب (۲) درست است.

حل ۸۷:

اگر مقاومت‌های R_F و ۱۰۰ اهم قرار گرفته در امیتر ترانزیستور $Q_۱$ را به عنوان شبکه فیدبک در نظر بگیریم، در این صورت نوع فیدبک منفی آن ولتاژ- سری خواهد بود. در حالتی که کلید باز است، بهره ولتاژ مدار تقریبا برابر با مقدار بهره ولتاژ مدار معادل A فیدبک است. از طرفی مقدار فیدبک آن به صورت $\beta = \frac{۱۰۰\Omega}{۱۰۰\Omega + R_F}$ است. لذا با توجه به رابطه بهره ولتاژ در حالت کلید بسته می‌توان نوشت:

$$A_f = \frac{v_o}{v_s} = \frac{A}{۱ + \beta A} = -۴۰ \;\Rightarrow\; \beta = \frac{۱}{۵۰} = ۰٫۰۲ \;\Rightarrow\; R_F = ۴٫۹\,k\Omega$$

لذا جواب (۲) درست است.

حل ۸۸:

با در نظر گرفتن مقاومت ۲۰۰ اهم قرار گرفته در امیتر ترانزیستور $Q_۱$ به‌عنوان شبکه فیدبک با ورودی جریان امیتر ترانزیستور $Q_۳$، نوع فیدبک منفی آن جریان- سری خواهد بود. از طرفی به دلیل سری بودن سه طبقه تقویت‌کننده، مقدار بهره جریان مدار بارگذاری شده A آن بسیار

بزرگتر از یک است. به عبارتی دیگر، به دلیل بسیار بزرگ بودن بهره حلقه ($\beta A >> 1$) مقدار بهره جریان حلقه بسته آن تقریبا به صورت زیر است:

$$\frac{i_{e۳}}{v_{in}} = \frac{A}{۱+\beta A} \simeq \frac{۱}{\beta} = \frac{۱}{۲۰۰\Omega} \quad => \quad v_{out} = \alpha i_{e۳} \times ۱۰k\Omega \quad =>$$

$$A_v = \frac{\alpha \times ۱۰k\Omega}{۲۰۰\Omega} \simeq ۵۰$$

لذا جواب (۱) درست است.

حل ۸۹:

جریان گذرنده از مقاومت R برابر با $i_R = v_{in}/R = ۰/۰۵\sin(\omega t)$ است. ترانزیستورهای $Q_۵$ و $Q_۶$ به‌صورت آرایش پوش- پول هستند و بسته به علامت ورودی V_{in} در هر زمان فقط یکی از این ترانزیستورها روشن خواهد بود. لذا، در نیم سیکل مثبت ورودی، فقط ترانزیستور $Q_۵$ روشن بوده و جریان گذرنده از آن برابر با i_R است. جریان $Q_۵$ وارد آینه جریان متشکل از ترانزیستورهای $Q_۱$ و $Q_۳$ شده و به خروجی مدار منتقل می‌گردد. بنابراین $i_L = ٤i_R$ و $v_{out} = R_L i_L = ٤\sin(\omega t)$ بدست می‌آیند. در حالت نیم سیکل منفی ورودی، با توجه به تقارن کامل مدار نتیجه مشابهی بدست می‌آید. لذا جواب (۳) درست است.

حل ۹۰:

دامنه ولتاژ خروجی لازم برای توان تحویلی ۲ وات به بار ٤ اهمی برابر با $V_o = \sqrt{۲P_L R_L} = ٤V$ است. همچنین دامنه جریان بار برابر با یک آمپر است. لذا حداکثر جریان بیس ترانزیستور $Q_۱$ به‌صورت $i_{B۱,max} = i_{L,max}/(\beta+۱) = ۵۰mA$ است. از طرفی با توجه به شکل مدار می‌توان نوشت:

$$V_{CC} = R\, i_{B۱,max} + V_{EC۳,sat} + V_{BE۱} + ۰/۵\Omega \times i_{L,max} + V_o \quad =>$$

$$V_z = R\, i_{B۱,max} + V_{EB۳}$$

$$V_{CC} = ٦/۷V, \quad R = ۲٦\Omega$$

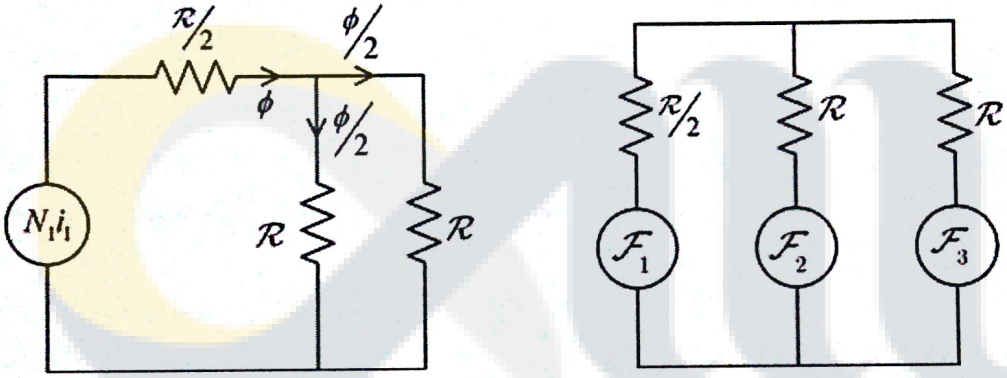
لذا جواب (۱) درست است.

حل سؤالات ماشین‌های الکتریکی

****

حل ۹۱: مدار معادل مغناطیسی حالت کلی شکل سمت راست:

از آنجا که اندوکتانس متقابل $L_{۱۲}$ نسبت شار پیوندی سیم‌پیچی ۲ در اثر جریان سیم‌پیچی ۱ است با برداشتن منابع $\mathcal{F}_۲$ و $\mathcal{F}_۳$ از مدار معادل شکل سمت راست مدار معادل شکل سمت چپ $L_{۱۲}$ بدست می‌آید:



$$\phi = \frac{N_۱ i_۱}{\Re} \quad , \quad \Re = \frac{g}{\mu . A}$$

$$L_{۱۲} = \frac{\frac{\phi}{۲} N_۲}{i_۱} = \frac{N_۱ N_۲}{۲\Re} = \frac{N_۱ N_۲ \mu . A}{۲g}$$

لذا گزینه (٤) درست است.

حل ۹۲:

با اجرای قانون حلقه نیروی محرکه مغناطیسی سیم پیچی چنین است.

$$\mathcal{F} = Ni = H_۱ l_۱ + H_۲ l_۲ + H_g l_g$$

از مشخص B-H در قسمت اول و دوم:

$$B_۱ = ۱T \quad \Rightarrow \quad H_۱ = ۱۰۰AT$$

$$A_۱ = ۱/۲A_۲ \quad \Rightarrow \quad B_۲ = ۱/۲T$$

معادله پاره خط دوم $\quad B = ۱۰^{-۳} H + ۰/۹$

$B_۲ = ۱/۲$ بازاء $۱/۲ = ۱۰^{-۳} H_۲ + ۰/۹ \quad \Rightarrow \quad H_۲ = ۳۰۰AT$

$$B_g = ۱T \Rightarrow H_g = \frac{۱}{٤\pi \times ۱۰^{-۷}} AT/m$$

با جاگذاری در معادلهٔ حلقه:

$$۱۰۰۰i = ۱۰۰ \times ۱ + ۳۰۰ \times ۰/٤ + \frac{۱}{٤\pi \times ۱۰^{-۷}} \times \frac{\pi}{۱۰۰} \times ۱۰^{-۲}$$

$$= ۱۰۰ + ۱۲۰ + ۲۵۰ = ٤۷۰ \quad \Rightarrow \quad i = ۰/٤۷A$$

لذا گزینه (۳) درست است.

حل ۹۳:

$$N_s = \frac{۱۲۰ \times ۵۰}{٤} = ۱۵۰۰ r.p.m$$

$$s = \frac{۱۵۰۰ - ۱٤٤۰}{۱۵۰۰} = ۰/۰٤$$

$P_i = ۱۰kW$ توان ورودی رتور $P_{ir} = ۱۰ - ۰/۵ = ۹/۵kW$

توان خروجی رتور $P_{or} = (۱-s)P_{ir} = ۹/۵ \times (۱ - ۰/۰٤) = ۹/۵ \times ۰/۹٦ = ۹/۰۵kW$

توان خروجی موتور $P_o = P_{or} - ۰/۷۵ = ۹/۰۲ - ۰/۷۵ = ۸/۳۷kW$

$$\eta = \frac{P_o}{P_i} = \frac{۸/۳۷}{۱۰} \times ۱۰۰ = ۸۳/۷\%$$

لذا گزینه (۱) درست است.

حل ۹۴:

$$N_s = \frac{۱۲۰ \times ۵۰}{٤} = ۱۵۰۰ \text{ r.p.m} \qquad s_f = \frac{۱۵۰۰ - ۱٤٤۰}{۱۵۰۰} = ۰/۰٤$$

در راه‌اندازی ستاره گشتاور $\frac{۱}{۳} = (\frac{۱}{\sqrt{۳}})^۲$ حالت مثلث است.

$$T_s = I_s^۲ s_f = (٤\sqrt{۳})^۲ \times ۰/۰٤ = ۱/۹۲ \text{ p.u}$$

$$T_s' = \frac{۱}{۳} T_s = \frac{۱}{۳} \times ۱/۹۲ = ۰/٦٤ \text{ p.u}$$

لذا گزینه (۱) درست است.

حل ۹۵:

نسبت جریان رتور در گشتاور حداکثر و بار کامل:

$$P_{Curm} = ٤P_{Curf} \quad \Rightarrow \quad I_{rm}^۲ R_r = ٤I_{rf}^۲ R_r \Rightarrow I_{rm} = ۲I_f$$

نسبت گشتاور حداکثر به گشتاور بار کامل:

$$T \propto I_2^2 \frac{R_2}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_m}{T_f} = \left(\frac{I_{2m}}{I_f}\right)^2 \frac{s_f}{s_m} = 4\frac{s_f}{s_m} = 4a \propto$$

از طرف دیگر این نسبت برحسب لغزش‌ها چنین است:

$$\frac{T_m}{T_f} = \frac{s_m^2 + s_f^2}{2s_m s_f} = \frac{1+\left(\frac{s_f}{s_m}\right)}{2\frac{s_f}{s_m}} = \frac{1+a^2}{2a} = 4a \Rightarrow 7a^2 = 1 \quad a = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow \frac{T_m}{T_f} = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

لذا گزینهٔ (۲) درست است.

حل ۹۶:

امپدانس رتور با افزودن مقاومت رتور:

$$Z = 0.5 + j3 + 3.5 = 4 + j3\Omega$$

$$|Z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\Omega$$

ولتاژ هر فاز رتور و جریان آن:

$$V_{ph} = 25V \quad \Rightarrow \quad I = \frac{25}{5} = 5A \quad \cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{4}{5} = 0.8$$

لذا گزینه (٤) درست است.

حل ۹۷:

در بار اهمی:

$$P_n = 100\ kW$$

تلفات آهن ثابت بوده و تلفات مس به نسبت مجذور بار تغییر می‌کند:

$$\eta = 0.8 = \frac{100}{100 + P_{Fe} + P_{Cun}} = \frac{50}{50 + P_{Fe} + \frac{1}{4}P_{Cun}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.8P_{Fe} + 0.2P_{Cun} = 10 \\ 0.8P_{Fe} + 0.8P_{Cun} = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} P_{Cun} = \frac{50}{3}kW & \text{تلفات مس کامل} \\ P_{Fe} = \frac{25}{3}kW & \text{تلفات آهن} \end{array}$$

مقاومت معادل برابر p.u تلفات مس بار کامل است:

$$R = P_{Cun}(pu) = \frac{\frac{۵۰}{۳}}{۱۰۰} = \frac{۱}{٦}\ p.u$$

لذا گزینه (۳) درست است.

حل ۹۸ :

از آنجا که کار انجام شده در حرکت کند برابر تفاوت شبه‌انرژی‌های ابتدا و انتهای حرکت است و مدار مغناطیسی نیز خطی است و انرژی و شبه‌انرژی برابرند، در فرآیند حرکتی که جریان ثابت است ($i = ۲A$) کار انجام شده برابر است با تفاوت انرژی قبل از حرکت و بعد از حرکت:

$$\Delta W_m = W_۲ - W_۱$$

$$W = \frac{۱}{۲}Li^۲ \Rightarrow L = \frac{N^۲}{\frac{۲x}{\mu.A}} = \frac{N^۲\mu.A}{۲x} \Rightarrow W = \frac{۱}{۲}\frac{N^۲\mu.Ai^۲}{٤x}$$

$$\Delta W = \frac{N^۲\mu.Ai^۲}{٤}\left(\frac{۱}{x_۲} - \frac{۱}{x_۱}\right) = \frac{۱۰۰^۲ \times ٤\pi \times ۱۰^{-۷} \times ۳۰ \times ۱۰^{-٤} \times ۲^۲}{٤}\left(\frac{۱}{۰/٤} - \frac{۱}{۱}\right) \times \frac{۱}{۱۰^{-۳}}$$

$$= ۱۸\pi \times ۱۰^{-۳} = ۱۸\pi\ mJ$$

لذا گزینه (۱) درست است.

حل ۹۹:

با توجه به رابطهٔ سرعت‌ها در حالت بی‌بار $I_{a۱} = ۰$ است داریم:

$$\frac{N_۱}{N_۲} = \frac{V_t - R_a I_{a۱}}{V_t - R_a I_{a۲}} \cdot \frac{\phi_۲}{\phi_۱} \Rightarrow \frac{۱۲۰۰}{۱۳۲۰} = \frac{۲٤۰}{۲٤۰ - ۰/٤ \times ۵۰} \cdot \frac{\phi_۲}{\phi_۱}$$

$$\frac{\phi_۲}{\phi_۱} = \frac{۱۲۰۰}{۱۳۲۰} \times \frac{۲۲۰}{۲٤۰} = \frac{۵}{٦}$$

لذا گزینه (۱) درست است.

حل ۱۰۰ :

$$E_a = V_t + R_a I_a = ۲۲۰ + ٤۰ \times ۰/۲۵ = ۲۳۰V$$

با تقریب خطی نقطه $۲۳۰V$ و $۲۳۲\ V$ جدول رابطهٔ I_f, E_a چنین است: $E_a = ۲٤I_f + ۱۸٤$

$$۲۳۰ = ۲٤I_f + ۱۸٤ \Rightarrow I_f = \frac{۲۳}{۱۲}A$$

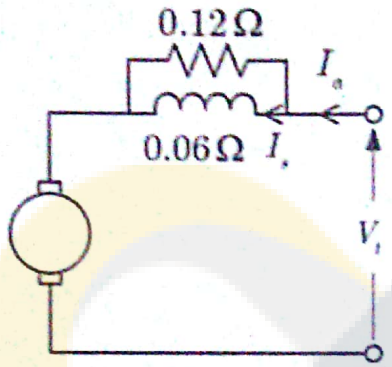
جریان تحریک نظیر ۲۲۰V بی‌باری ۱٫۵ آمپر است. برای اینکه در حالت کمپوند ولتاژ معادل ۲۲۰V باشد. آمپر دور شنت حالت بی‌بار و آمپر دور سری آن با آمپر دور شنت حالت با بار باید مساوی باشد:

$$۲۵۰۰\times\frac{۲۳}{۱۲}=۲۵۰۰\times۱٫۵+AT_s \quad\Rightarrow\quad AT_s=۲۵۰۰(\frac{۲۳}{۱۲}-\frac{۳}{۲})=۲۵۰۰\times\frac{۵}{۱۲}=۱۰٤۱٫٦$$

$$AT_s=۱۰٤۲AT$$

لذا گزینه (۳) درست است.

حل ۱۰۱:



از آنجا که مدار مغناطیسی خطی است $\phi\propto I_a$ و گشتاور متناسب با مجذور آن می‌شود:

$$T_۱\propto I_a^۲ \qquad I_a=۲۰A$$

$$T_۲\propto I_aI_s \qquad I_s=I_a\times\frac{۰٫۱۲}{۰٫۱۸}=\frac{۲}{۳}I_a$$

$$T_۱\propto ۲۰^۲$$

$$T_۲\propto\frac{۲}{۳}I_a^۲ \quad\Rightarrow\quad \frac{T_۲}{T_۱}=۲=\frac{\frac{۲}{۳}I_a^۲}{۲۰^۲} \quad\Rightarrow\quad I_a=۲۰\sqrt{۳}=۳٤٫٦A$$

لذا گزینه (٤) درست است.

حل ۱۰۲: از آنجا که در موتور شنت جریان تحریک ثابت است. $\frac{E_۲}{E_۱}=\frac{N_۲}{N_۱}$

از مشخصهٔ ماشین:

$$\frac{E_۲}{۲۱۵}=\frac{۱۱۵۰}{۱۰۷۵}\Rightarrow E_۲=\frac{۲۱۵}{۱۰۷۵}\times۱۱۵۰=۰٫۲\times۱۱۵۰\Rightarrow E_۲=۲۳۰V\Rightarrow I_f=٤A$$

$$R_f=\frac{۲۱۵}{٤}=۵۳٫۷۵\Omega$$

لذا گزینه (۱) درست است.

حل ۱۰۳:

در حالت دوم که یکی از سیم‌پیچی‌های فشار ضعیف قطع می‌شود و دو سیم‌پیچی دیگر در شرایطی نامی کار می‌کنند تلفات هسته معادل حالت اصلی است. $P_{Fe}=۱٫۸kW$

چون یکی از سیم‌پیچی‌های فشار ضعیف قطع شده دو سیم‌پیچی باقی مانده و لذا تلفات طرف فشار ضعیف $\frac{۲}{۳}$ حالت نامی است.

$$P_{Cu۱} = ۳ \times \frac{۲}{۳} = ۲\ kW$$

تلفات مس در سیم‌پیچی فشار قوی برابر است با:

$$P_{Cu۲} = \left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ ۲٫۷ = ۱٫۲\ kW$$

زیرا جریان در این سیم‌پیچی $\frac{۲}{۳}$ حالت قبل شده است.

تلفات کل:

$$\Delta P = ۱٫۸ + ۲ + ۱٫۲ = ۵\ kW$$

$$\eta = \frac{\frac{۲}{۳} \times ۱۰۰}{\frac{۲}{۳} \times ۱۰۰ + ۵} = \frac{۲۰۰}{۲۱۵} \times ۱۰۰ = ۹۳٫۰۲\%$$

لذا گزینه (۲) درست است.

حل ۱۰۴ : مقاومت مبنا

$$R_b = \frac{V^۲}{S} = \frac{۲۰۰^۲}{۲۰۰۰} = ۲\Omega$$

$$R = P_{Cun} = ۰٫۰۱۵\ pu$$

$$R = ۰٫۰۱۵ \times ۲ = ۰٫۰۳\ \Omega \quad \Rightarrow \quad P_{Cu} = ۹۰^۲ \times ۰٫۰۳ = ۲۴۳\ W = P_{Fe} = ۰٫۲۴۳\ kW$$

$$P_{Cun} = ۰٫۰۱۵ \times ۲۰ = ۰/۳\ kW$$

تلفات مس در نصف بار نامی:

$$P_{Cu} = ۰٫۳ \times \frac{۱}{۴}$$

$$\eta = \frac{۱۰ \times ۰٫۸}{۸ + ۰٫۲۴۳ + ۰٫۳ \times \frac{۱}{۴}} = \frac{۸}{۸٫۳۱۸} = ۹۶٫۱۷\%$$

لذا گزینه (۴) درست است.

حل ۱۰۵ :

حداکثر تنظیم ولتاژ برابر درصد امپدانس ترانسفورماتور یعنی برابر درصد ولتاژ اتصال کوتاه است.

$$\varepsilon_{max} = Z\% = V_{sc}\%$$

$$\%Z = \frac{۵}{۴۰۰} \times ۱۰۰ = ۲٫۵\%$$

لذا گزینه (۱) درست است.

حل سؤالات کنترل خطی

****

حل ۱۰۶ : معادله مشخصه سیستم حلقه بسته، مخرج کسر تابع تبدیل است که از فرمول میسن به دست می‌آید. حلقه‌های نمودار دیاگرام بلوکی عبارتند از:

$$-G_1G_2H_1, -G_2H_2, G_1G_3H_2G_2H_1$$

لذا با اعمال فرمول میسن داریم

$$\Delta = 1-(-G_1G_2H - G_2H_2 + G_1G_3H_2G_2H_1)$$
$$= 1 + G_1G_2H + G_2H_2 - G_1G_3G_2H_1H_2$$

لذا گزینه درست (٤) است.

حل ۱۰۷ : توابع تبدیل از اغتشاش‌های $T_1(s)$ و $T_2(s)$ به $Y(s)$ را به دست می‌آوریم.

برای $T_2(s)=R(s)=0$ داریم:

$$\frac{Y(s)}{T_1(s)} = \frac{k_2G_2(s)}{1+k_1k_2G_1(s)G_3(s)}$$

و برای $T_1(s)=R(s)=0$ داریم

$$\frac{Y(s)}{T_2(s)} = \frac{1}{1+k_1k_2G_1(s)G_2(s)}$$

برای کاهش اثر اغتشاش‌ها باید داشته باشیم که k_2 کوچک و k_1 بزرگ به طوری که k_1k_2 بزرگ باشد و گزینه (۲) درست است.

حل ۱۰۸ : نخست بایستی مقادیر A و B را تعیین کنیم. از معادله‌ی پاسخ پله واحد یک سیستم مرتبه دوم برای $\frac{dy}{dt}=0$، داریم

$$\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\, t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$$

و لذا

$$t_{P_A} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad t_{P_B} = \frac{3\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

با جایگزینی در معادله‌ی پاسخ پله واحد سیستم به دست می‌آوریم

$$A = -\frac{\exp\left(-\zeta\omega_n \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\pi+\cos^{-1}\zeta)$$

$$= \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

و

$$B = \exp\left(\frac{-3\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

لذا

$$\frac{A}{B} = \exp\left(\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

که می‌دهد $\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$. از این معادله به دست می‌آوریم $\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}}$.

گزینه (۲) درست است.

حل۱۰۹ : توجه کنید که A و B در هر چهار گزینه یکسان است. لذا داریم

$$(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+s+2}\begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر، پاسخ ضربه با حضور d=۱ در t=۰ مقدار خواهد داشت و لذا گزینه‌های (۳) و (٤) با توجه به شکل‌های داده شده نادرست هستند. برای گزینه (۲) داریم.

$$g(s) = \frac{1+2s}{s^2+s+2}$$

که پاسخ حالت ماندگار آن $\frac{1}{2}$ خواهد بود و با شکل پاسخ پله در تناقض است. اگر صورت کلی تابع تبدیل را بنویسیم داریم

$$g(s) = \frac{b_1 s + b_2}{s^2+s+2}$$

شرط حالت ماندگار پاسخ پله واحد می‌دهد $b_2=2$ و برای بر قراری شرط روی رفتار اولیه پاسخ ضربه داریم

$$y(0^+)=\lim_{s\to\infty} sy(s)=b_1=0$$

و لذا $C=[2 \quad 0]$ درست و گزینه (۱) درست است.

حل ۱۱۰ : در بررسی گزینه دوم داریم که وجود سطر صفر در جدول راث بر ریشه‌هایی دلالت می‌کند که منفی‌ی یکدیگر هستند و لذا می‌توانند روی محور $j\omega$ نباشند. بنابراین گزینه (۲) نادرست است. در بررسی گزینه سوم داریم که حتی اگر هر دو قطب سیستم در سمت چپ خط $\sigma=-2$ باشند، وجود یک صفر می‌تواند بر زمان نشست سیستم تأثیر بگذارد و آن را افزایش دهد.

در بررسی گزینه چهارم می‌توان گفت که اگر همه قطب‌ها و صفرهای سیستم در سمت چپ صفحه s باشند، با تغییر علامت بهره سیستم منحنی اندازه تغییر نمی‌کند ولی منحنی فاز تغییر می‌کند.

از طرف دیگر، برای نقطه شکست باید قطب مکرر داشته باشیم، زیرا دو یا چند شاخه باید همدیگر را قطع نمایند. برای وجود نقطه شکست مختلط باید حداقل چهار شاخه وجود داشته باشد، زیرا نقاط شکست به صورت مختلط مزدوج رخ می‌دهند و گزینه (۱)درست است.

حل ۱۱۱ : تابع تبدیل سیستم جبران شده $G(s)=\dfrac{k_p+k_d s}{s(s+2)}$ است. لذا

$$K_v=\lim_{s\to 0} s\,G(s)=\frac{K_p}{2}=2 \quad \Rightarrow K_p=4$$

از این رو تابع تبدیل حلقه بسته سیستم عبارت است از

$$T(s)=\frac{4+k_d s}{s^2+(2+k_d)s+4}$$

و برای آن که سیستم میرای بحرانی باشد، داریم $k_d=2$. از طرف دیگر

$$T(s)=\frac{2(2+s)}{(s+2)^2}=\frac{2}{s+2}$$

که همانند یک سیستم مرتبه اول عمل می‌کند.

گزینه (٤) درست است.

حل ۱۱۲ : از نمودار مکان ریشه داریم

$$g(s)=\frac{k}{s(s+۳+\beta j)(s+۳-\beta j)}=\frac{k}{s(s^{۲}+٦s+۹+\beta^{۲})}$$

با توجه به این که نقطه شکست در ۲- است داریم:

$$\frac{dk}{ds}=-(۳s^{۲}+۱۲s+۹+\beta^{۲})=-(s+۲)^{۲}$$

و لذا

$$۳+\frac{\beta^{۲}}{۳}=٤$$

که می‌دهد $\beta=\sqrt{۳}$. بنابراین

$$g(s)=\frac{k}{s(s^{۲}+٦s+۱۲)}$$

و خطای حالت ماندگار به ورودی پله صفر و ورودی شیب با

$$K_v=\lim_{s\to ۰}\frac{s}{۲}g(s)=\frac{k}{۲٤}$$

عبارت است از $e_{ss}=\frac{۲٤}{k}$. حال باید حداکثر مقدار بهره k را تعیین کرد. داریم

$$\begin{array}{c|cc} s^{۳} & ۱ & ۱۲ \\ s^{۲} & ٦ & k \\ s^{۱} & ۷۲-k & \\ s & k & \end{array}$$

و لذا $k<۷۲$ که می‌دهد $e_{ss}<\frac{۱}{۳}$.

گزینه (۲) درست است.

حل ۱۱۳ : از تقارن مکان قطب‌ها و صفرها به سادگی مشاهده می‌شود که تنها شکل ۳ برای $k>۰$ و $k<۰$ متقارن است. اگر مکان ریشه را برای $g_{۱}(s)=\frac{(s-۱)(s-۲)}{(s+۱)(s+۲)}$ و سپس برای $g(s)=g_{۱}(s)\frac{(s-۳)(s-٤)}{(s+۳)(s+٤)}$ رسم کنیم، به سادگی به شکل ۳ می‌رسیم.

گزینه (۳) درست است.

حل ۱۱۴ : نخست تابع تبدیل دستگاه اصلی را به دست می‌آوریم. داریم

$$g(s)=\frac{k_1}{s^2-k_1s+4+2k_1}$$

با مقدار $k_1=-2$، سیستم در مرز پایداری قرار می‌گیرد. سپس تابع تبدیل سیستم حلقه بسته را به دست می‌آوریم

$$T(s)=\frac{k_1k_2}{s^2-k_1s+4+2k_1+k_1k_2(s-3)}$$

لذا تابع تبدیل معادل برای فیدبک واحد با $k_1=-2$ عبارت است از

$$G_{eq}(s)=\frac{-2k_2(s-3)}{s(s+2)}\quad (k_2\geq 0)$$

و مکان هندسی ریشه‌های این تابع تبدیل شکل ٤ است و گزینه (٤) درست است.

حل ۱۱۵ : از رفتار فرکانس پائین نمودار دامنه مشاهده می‌شود که -60 dB بر دهه افت داشته است و لذا عامل $\frac{1}{s^3}$ در تابع تبدیل حضور دارد. از طرف دیگر، از رفتار فرکانس پائین نمودار فاز داریم که بهره تابع تبدیل باید منفی باشد و لذا $-\frac{k}{s^3}$ را برای $k>0$ داریم. همچنین رفتار فرکانس بالای نمودار فاز (دست چپ بودن صفرها در تمام گزینه‌ها) درجه نسبی یک را برای سیستم تأئید می‌کند. لذا صورت کلی تابع تبدیل به شکل زیر است (به رفتار فرکانس بالای نمودار دامنه نیز توجه کنید):

$$G(s)=\frac{-k(s+z_1)(s+z_2)}{s^3(s+p_1)(s+p_2)}$$

که در آن p_1 و p_2 قطب‌های غیر غالب هستند و گزینه (۱) درست است.

حل ۱۱۶: نخست تابع تبدیل حلقه داخلی را به دست می‌آوریم و سپس تابع تبدیل حلقه باز زیر را می‌نویسیم

$$G(s)=\frac{2k}{s(s+2)+2}$$

توجه کنید که مقدار T (به شرط پایداری) بر مقدار خطای حالت ماندگار تاثیر نمی‌گذارد. از این رو،

$$e_{ss} = \frac{۱}{۱+k} = \frac{۲}{۳} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{۱}{۲}$$

اکنون تابع تبدیل حلقه بسته را به دست می‌آوریم

$$T(s) = \frac{۱}{s^۲ + ۲s + ۲ + e^{-Ts}}$$

و لذا برای تمام T پایدار است ($۲+e^{-Ts}$ همواره مثبت است). و گزینه (٤) درست است.

حل ۱۱۷ : با توجه به رفتار فرکانس پائین نمودار نایکوئیست، سیستم ۲ قطب در مبداء دارد. افزایش زاویه فاز در ابتدا و سپس کاهش آن از -۱۸۰° به -۳٦۰° به معنای آن است که سیستم ۳ قطب دیگر دارد که بعد از صفر آن عمل می‌کنند و گزینه (۳) درست است.

حل ۱۱۸ : تابع تبدیل حلقه بسته سیستم عبارت است از

$$T(s) = \frac{ks^۲}{(k+۱)s^۲ + ۱}$$

و لذا برای $-۱ < k < \infty$ در مرز پایداری قرار دارد و برای $-\infty < k < -۱$ ناپایدار است. لذا یکی از دو گزینه ۳ یا ٤ درست است. از طرف دیگر داریم.

$$G(j\omega) = \frac{-\omega^۲}{-\omega^۲ + ۱}$$

و لذا رفتار تابع تبدیل به ازاء وارد شدن ω به ۱ از طرف چپ یا راست متفاوت خواهد بود. اگر از طرف چپ وارد شود ($\omega \to ۱^-$)، داریم $G(j\omega) \to -\infty$ و اگر از طرف راست وارد شود ($\omega \to ۱^+$)، داریم $G(j\omega) \to \infty$ و گزینه (۳) درست است.

حل ۱۱۹ : با توجه به این که نمودار نایکوئیست در $\omega \to \infty$ با فاز -۱۸۰° وارد مبداء شده است، لذا یک صفر در تابع تبدیل وجود دارد و جبران ساز به صورت PD است. از طرف دیگر، نمودار نایکوئیست در $\omega \to ۰$ نشان می‌دهد که فاز با زاویه‌ای کمتر از -۹۰° (سمت چپ محور موهومی) آغاز شده است. داریم

$$\lim_{\omega \to ۰^+} \angle G(j\omega) = \lim_{\omega \to ۰^+} \left[\tan^{-۱} T_D\omega - ۹۰^\circ - \tan^{-۱} T_۱\omega - \tan^{-۱} T_۲\omega \right]$$

$$= -۹۰^\circ + \lim_{\omega \to ۰^+} \left[\tan^{-۱} T_D\omega - \tan^{-۱} T_۱\omega - \tan^{-۱} T_۲\omega \right]$$

$$\approx -۹۰^\circ + \left[T_D - T_۱ - T_۲ \right]\omega$$

که می‌دهد $T_D < T_۱ + T_۲$ و لذا گزینه (۳) درست است.

حل ۱۲۰ : با توجه به نمودار دامنه داده شده، تابع تبدیل یک قطب در مبداء دارد و از نمودار فاز داریم که بهره آن منفی و در ساده‌ترین حالت دو قطب در نیمه چپ صفحه دارد (ممکن است تابع تبدیل صفرهایی نیز داشته باشد که تفاضل قطب و صفر آن باید سه باشد). در ساده‌ترین حالت سیستم حلقه بسته ناپایدار است و سیستم تنها با یک PD پایدار خواهد شد. لذا گزینه (۲) درست است.

۷۶ـ گزینه «۳» $x[n]$ سیگنال حقیقی است:

$$x[n] = x^*[n] \xrightarrow{f} X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) \qquad (۱)$$

$X(e^{j\omega})$ حقیقی است:

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{j\omega}) \qquad (۲)$$

از مقایسه‌ی (۱) و (۲) داریم:

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) \xrightarrow{f^{-1}} x[n] = x[-n]$$

بنابراین سیگنال $x[n]$ به ازای کلیه nها باید زوج باشد.

۷۷ـ گزینه «۱» طبق رابطه پارسوال برای سیگنال‌های گسسته می‌دانیم که:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^۲ = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |Y(e^{j\omega})|^۲ \, d\omega \qquad (۱)$$

در این‌جا $Y(e^{j\omega}) = \frac{d}{d\omega}(\mathrm{Im}(X(e^{j\omega})))$ است که $\mathrm{Im}(X(e^{j\omega}))$ قسمت موهومی $X(e^{j\omega})$ می‌باشد.

$$\mathrm{Im}(X(e^{j\omega})) = \frac{X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})}{۲j} \xrightarrow{f^{-1}} \frac{۱}{۲j}(x[n] - x^*[-n])$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{d}{d\omega}(\mathrm{Im}(X(e^{j\omega}))) \xrightarrow{f^{-1}} y[n] = (-jn)\frac{۱}{j}(x[n] - x^*[-n]) = -\frac{n}{۲}(x[n] - x^*[-n])$$

اکنون سیگنال $y[n]$ را بدست می‌آوریم:

$$y[-۲] = (x[-۲] - x^*[۲]) = -۲$$

$$y[-۱] = \frac{۱}{۲}(x[-۱] - x^*[۱]) = -۱ \qquad y[۰] = ۰$$

$$y[۱] = -\frac{۱}{۲}(x[۱] - x^*[-۱]) = -۱ \qquad y[۲] = -(x[۲] - x^*[-۲]) = -۲$$

طبق رابطه‌ی (۱):

$$\int_{-\pi}^{\pi} |Y(e^{j\omega})|^۲ d\omega = ۲\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^۲ = ۲\pi(۳+۱+۱+۴) = ۲۰\pi$$

نکته: باید دقت کرد که در سیگنال مختلط است بنابراین $\mathrm{Im}X(e^{j\omega})$ تبدیل فوریه قسمت فرد سیگنال نیست.

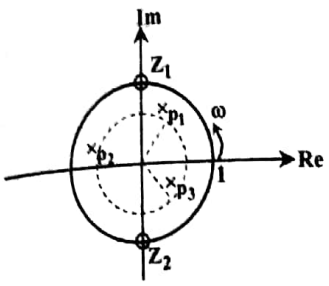
۷۸ـ گزینه «۲» با توجه به شکل مشخص است که $x(t)$ یک سیگنال حقیقی و فرد است و با توجه به خصوصیات تبدیل فوریه، $X(\omega)$ موهومی خالص و فرد خواهد بود.

$x(t) \Rightarrow x(0)=0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)d\omega = 0$ فرد است.

$x(t) \Rightarrow X(\omega)$ فرد $\Rightarrow X(\omega) = -X(-\omega)$ فرد است.

$x(t) \Rightarrow X(\omega)$ موهومی خالص $\Rightarrow Re\{X(\omega)\} = 0$ فرد و حقیقی

۷۹ـ گزینه «۱» از روی صفرها و قطب‌های تابع تبدیل سیستم می‌توان پی به شکل و اندازه آن برد.



$$H(z) = \frac{1+z^2}{0/5+z^3}$$

صفرها: $1+z^2=0 \Rightarrow z_1 = e^{j\frac{\pi}{2}}, z_2 = e^{-j\frac{\pi}{2}}$

قطب‌ها: $\frac{1}{2}+z^3=0 \Rightarrow p_1 = \sqrt[3]{0/5}\, e^{j\frac{\pi}{3}}, p_2 = \sqrt[3]{0/5}\, e^{j\pi}$

$P_3 = \sqrt[3]{0/5}\, e^{j\frac{5\pi}{3}}$

با توجه به این‌که دو صفر در فرکانس‌های $\pm\frac{\pi}{2}$ داریم، پس اندازه پاسخ فرکانس باید در این فرکانس‌ها صفر شود و تنها گزینه‌های ۱ و ۲ می‌توانند صحیح باشند.

از طرفی چون قطب p_2 نزدیک $\omega=\pi$ است پس در این فرکانس $|H(z)|$ ماکزیمم می‌شود.

۸۰ـ گزینه «۲»

$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \qquad RoC: |z| > \frac{1}{2}$

خاصیت مقیاس‌دهی حوزه فرکانس عبارت است از:

$(-1)^n x[n] = e^{j\pi n}\, x[n] \xleftrightarrow{Z} X(e^{-j\pi}z) = X(-z)$

ناحیه همگرایی $|-z| > \frac{1}{2} \Rightarrow |z| > \frac{1}{2}$

$y[n] = x[n] + (-1)^n x[n]$

طبق خاصیت خطی بودن تبدیل Z داریم:

$Y(z) = X(z) + X(-z) \qquad RoC: |z| > \frac{1}{2}$

۸۱ـ گزینه «۲» با توجه به این‌که سیگنال $x[n]$ حقیقی است:

$x_0[n] = \frac{x[n]-x[-n]}{2} \xleftrightarrow{f} jX_I(e^{j\omega})$

حال یک انتقال فرکانسی می‌دهیم:

$-jx_0[n] \xleftrightarrow{f} X_I(e^{j\omega}) \longleftrightarrow -jx_0[n]e^{-j\frac{\pi}{2}n} \longleftrightarrow X_I(e^{j(\omega+\frac{\pi}{2})})$

بنابراین سیگنال $y[n]$ را بدست می‌آوریم:

$y[n] = -6jx_0[n]e^{-j\frac{\pi}{2}n}$

$y[1] = -6jx_0[1]e^{-j\frac{\pi}{2}} = -6j\left(\frac{x[1]-x[-1]}{2}\right)(-j) = -6\left(\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

۸۲ـ گزینه «۱» طبق تعریف $f(t)$ داده شده در مسأله، $f(\frac{\pi}{2})$ را به دست می‌آوریم:

$f(\frac{\pi}{2}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Re\{x[n]\}\, e^{j2n\frac{\pi}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Re\{x[n]\}\, e^{jn\pi}$

$f(\frac{\pi}{2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x[n]+x^*[n]}{2} e^{jn\pi} = \frac{1}{2}\sum x[n]e^{jn\pi} + \frac{1}{2}\sum x^*[n]e^{jn\pi}$

هر کدام از عبارت‌ها یک تبدیل فوریه است:

$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=-\pi} + \frac{1}{2}X^*(e^{-j\omega})\Big|_{\omega=-\pi} = \frac{1}{2}X(e^{-j\pi}) + \frac{1}{2}X^*(e^{j\pi}))$

۸۳ـ گزینه «۳»

روش اول:

$$x(t-\tau) \to y(t-\tau)$$

$$e^{-j\omega\tau}.X(\omega) \to e^{-j\omega\tau}Y(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

یعنی اگر به ازای تمام فرکانس‌ها خصوصیت بالا در حوزه فرکانس برقرار باشد آن‌گاه سیستم تغییرناپذیر با زمان است. با توجه به گزینه‌ها، فقط از روی گزینه ۳ است که می‌توان مطمئن شد به ازای تمام فرکانس‌ها این خاصیت وجود دارد یا نه زیرا:

$$x(t)=u(t) \Rightarrow X(\omega)=\frac{1}{j\omega}+2\pi\delta(\omega)$$

و به ازای هیچ فرکانسی صفر نمی‌شود. پس می‌توان دریافت که در تمام فرکانس‌ها خصوصیت بالا وجود دارد.

روش دوم: با توجه به این‌که سیستم خطی است و می‌خواهیم شرط تغییرناپذیری با زمان صادق باشد، باید قادر باشیم هر سیگنال را با ترکیب خطی از سیگنال‌های شیفت یافته بسازیم. یکی از این سیگنال‌ها، $\delta(t)$ است.

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

طبق خواص کانولوشن می‌دانیم که اگر مشتق سیگنال را با تابع پله کانوالو کنیم، باز هم سیگنال $x(t)$ بدست می‌آید.

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x'(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

لذا توانستیم سیگنال $x(t)$ را با توابع پله شیفت یافته بسازیم.

۸۴ـ گزینه «۴» به صورت سؤال خوب دقت کنید. پاسخ ضربه را به صورت $h[n]$ و ورودی سیستم را $x[n]=h[-n]$ معرفی کرده است. طبق خاصیت LTI این سیستم می‌توان خروجی را به صورت کانولوشن ورودی در پاسخ ضربه نوشت:

$$y[n]=h[n]*x[n]$$

چون صورت مسأله $Y(z)$ را به ما داده است، از دو طرف رابطه تبدیل Z می‌گیریم:

$$y[n]=h[n]*h[-n]$$

از آنجایی که سیستم علی می‌باشد پس تبدیل Z یک‌طرفه و دوطرفه آن با هم مساوی هستند و می‌توانیم بگوییم:

$$Y(z)=Y_u(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty} x_1[n]z^{-n}$$

اگر بخواهیم A را محاسبه کنیم و فرض کنیم $x_1[n]=h[n]$ است:

$$Y(1)=\sum_{n=0}^{+\infty} h[n]$$

بنابراین کافی است $Y(1)$ را به دست آوریم که برابر است با:

$$Y(z)=H(z).H(\frac{1}{z})$$

$$Y(1)=H(1).H(\frac{1}{1}) \Rightarrow H(1)=\sqrt{Y(1)} \Rightarrow H(1)=\sqrt{\frac{9(1)}{(3(1)-1)(3-(1))}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

$$B=\sum_{n=0}^{\infty} h^2[n]=h[n]*h[-n]\Big|_{n=0}=y[0]$$

با بسط به کسرهای جزئی $Y(z)$ سعی می‌کنیم $y[n]$ و $y[0]$ را پیدا کنیم.

$$Y(z)=\frac{\frac{9}{8}}{3z-1}+\frac{\frac{27}{8}}{3-z}=\frac{\frac{9}{8}z^{-1}}{3-z^{-1}}-\frac{\frac{27}{8}z^{-1}}{1-3z^{-1}}$$

با توجه به علّی بودن و پایدار بودن سیستم، ناحیه همگرایی $h[-n]*h[n]$ برابر است با $Roc:\frac{1}{3}<|z|<3$

$$y[n]=\frac{3}{8}(\frac{1}{3})^{n-1}u[n-1]+\frac{27}{8}(3)^{n-1}u[-n] \quad ; \quad y[0]=\frac{27}{8}(3)^{-1}=\frac{9}{8}$$

۸۵ـ گزینه «۴»

$$s_1: y(t)=\int_{0}^{\infty} e^{-2\tau}x(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau}u(\tau).x(t-\tau)d\tau=x(t)*e^{-2t}u(t)$$

$$Y(\omega)=X(\omega).\frac{1}{j\omega+2}$$

سیستم معکوس $Y(\omega)=(j\omega+2).X(\omega)$ یا $y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$

لذا سیستم ۱ معکوس‌پذیر است.

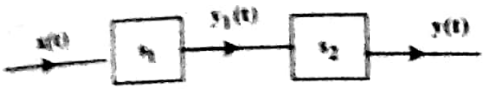
$$s_2: y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-2|\tau|}x(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|\tau|}.x(t-\tau)u(t-\tau)d\tau=x(t).u(t)*e^{-2|\tau|}$$

با توجه به این‌که این سیستم به ازای هر $x(t)$ دلخواهی که فقط به ازای زمان‌های منفی مقدار غیر صفر دارد خروجی صفر می‌دهد لذا سیستم یک به یک نبوده و معکوس ناپذیر است.

$x(t)=0 \quad t>0 \quad \rightarrow y(t)=0$

در واقع با توجه به این‌که قبل از ورودی سیگنال به سیستم، زمان‌های منفی آن را فیلتر کرده‌ایم قسمتی از ورودی را از دست داده‌ایم و سیستم معکوس هرگز نمی‌تواند زمان‌های منفی را بازیابی کند.

۸۶ـ گزینه «۴» واضح است که اتصال سری دو سیستم متغیر با زمان الزاماً متغیر با زمان نیست، به طور مثال:



$$s_1: y_1(t)=\frac{1}{t^2+1}x(t) \quad ; \quad s_2: y(t)=(t^2+1)y_1(t)$$

$s: y(t)=x(t) \rightarrow$ که تغییرناپذیر با زمان است.

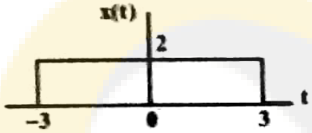
از همین مثال مشخص است که سیستم کلی نیز می‌تواند پایدار باشد.

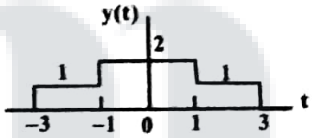
۸۷ـ گزینه «۳» با توجه به خطی بودن سیستم، باید خروجی را به صورت ترکیب خطی از ورودی‌ها (غیر TI) بنویسیم.

$$x(t)=\cos\omega_0 t \rightarrow y(t)=\cos(\omega_0 t)\cos(2\omega_0 t)=\frac{1}{2}\cos(3\omega_0 t)+\frac{1}{2}\cos(\omega_0 t)=\frac{1}{2}x(3t)+\frac{1}{2}x(t)$$

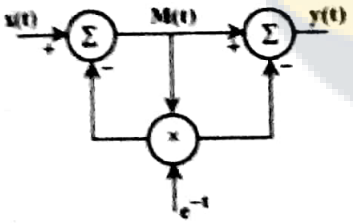
از آنجا که هر سیگنال از مجموعه‌ای از سیگنال‌های تک فرکانس با فرکانس ω_0 تشکیل شده است و به ازای هر کدام از آنها $y(t)=\frac{1}{2}x(3t)+\frac{1}{2}x(t)$

و چون سیستم خطی است، همه فرکانس‌ها به یک شکل به خروجی می‌روند، پس در حالت کلی: $y(t)=\frac{1}{2}x(3t)+\frac{1}{2}x(t)$





۸۸ـ گزینه «۱» اول از همه باید ضابطه بین ورودی و خروجی یعنی $x(t)$ و $y(t)$ را پیدا کنیم. در این‌جا یک سیگنال فرضی $M(t)$ را برای سادگی راه‌حل انتخاب کرده و رابطه را به دست می‌آوریم.



$$M(t)=x(t)-e^{-t}M(t) \Rightarrow M(t)=\frac{x(t)}{1+e^{-t}}$$

$$y(t)=M(t)-e^{-t}M(t)=\frac{(1-e^{-t})}{1+e^{-t}}x(t)$$

با توجه به رابطه ورودی و خروجی مشخص است که سیستم خطی است، زیرا $y(t)$ فقط به $x(t)$ ربط دارد. همچنین سیستم پایدار است زیرا

$$\left|\frac{1-e^{-t}}{1+e^{-t}}\right| \le 1$$

۸۹ـ گزینه «۲» همان‌طور که می‌دانید محاسبه پاسخ ضربه در حوزه زمان غیرممکن است و می‌توان آن را در فضای فرکانسی به دست آورد. سپس $x(t)$ و $y(t)$ را به فضای فوریه منتقل می‌کنیم.

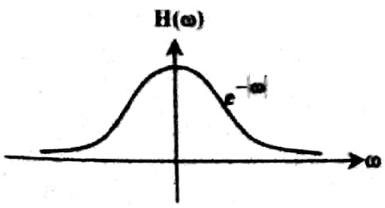
$$x(t)=\cos(\omega_0 t) \rightarrow X(\omega)=\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$y(t)=e^{-|\omega_0|}\cos\omega_0 t \Rightarrow Y(\omega)=e^{-|\omega|}.\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

برای به دست آوردن $H(\omega)$ باید $Y(\omega)$ و $X(\omega)$ را بر هم تقسیم کنیم پس:

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=e^{-|\omega_0|}$$

در این صورت $H(\omega)$ به ازای هر فرکانسی مانند ω_0 به صورت $e^{-|\omega_0|}$ خواهد بود. در نتیجه از تعریف تبدیل فوریه معکوس استفاده می‌کنیم و $h(0)$ و $h(1)$ را بدست می‌آوریم.



$$h(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|\omega|}d\omega=\frac{1}{\pi}$$

$$h(1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(\omega)e^{j\omega}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|\omega|}e^{j\omega}d\omega=\frac{1}{2\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{(j+1)\omega}d\omega+\int_{0}^{\infty}e^{(j-1)\omega}d\omega\right]=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{j+1}-\frac{1}{j-1}\right]=\frac{1}{2\pi}$$

۹- گزینه «۴» با توجه به این که $e^{-|t|}+t^{۲}+۱>۰$ است پس ریشه ندارد در نتیجه $\int(e^{-|t|}+t^{۲}+۲)\delta(e^{-|t|}+t^{۲}+۱)dt=۰$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(t+۲)\delta'(t+۱)dt \xlongequal{t+۱=\tau} \int_{-\infty}^{+\infty}(\tau+۱)\delta'(\tau)d\tau=-\frac{d}{d\tau}(\tau+۱)\Big|_{\tau=۰}=-۱$$

۹۱ـ گزینه «۲» خط تک فاز است و از دو دسته هادی رفت و برگشت تشکیل شده است. منظور از اندوکتانس خط، اندوکتانس معادل آن است که از مجموع اندوکتانس رفت و برگشت بدست می‌آید. لذا اگر L_x اندوکتانس هادی‌های رفت و L_y اندوکتانس هادی‌های برگشت باشد، اندوکتانس خط $L = L_x + L_y$ است. اندوکتانس هادی‌های رفت و برگشت به ترتیب از فرمول‌های $L_x = ۲\times۱۰^{-۷} \ln\frac{GMD}{GMR_x}$ و $L_y = ۲\times۱۰^{-۷} \ln\frac{GMD}{GMR_y}$ محاسبه می‌شوند. با توجه به ساختار خط تک فاز فاصله بین هادی‌ها به شکل مقابل است:

$$D_{AB} = ۲D \ , \ D_{AC} = D_{BC} = D$$

برای محاسبه اندوکتانس‌ها ابتدا GMD و GMR هادی‌های رفت و برگشت را پیدا می‌کنیم.

$$GMD = \sqrt{D_{AC}\times D_{BC}} = \sqrt{D^۲} = D$$

$$GMR_x = \sqrt{D_{AA}\times D_{AB}} = \sqrt{r'\times ۲D} \xrightarrow{r=\frac{D}{۸}} GMR_x = \sqrt{\frac{D^۲}{۴}} = \frac{D}{۲}$$

$$GMR_y = r = \frac{D}{۸}$$

در مرحله بعد GMD و GMR های بدست آمده را در روابط L_x و L_y جایگذاری می‌کنیم:

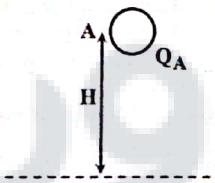
$$L_x = ۲\times۱۰^{-۷} \ln\frac{GMD}{GMR_x} = ۲\times۱۰^{-۷} \ln\frac{D}{\frac{D}{۲}} = ۲\times۱۰^{-۷} Ln۲$$

$$L_y = ۲\times۱۰^{-۷} \ln\frac{GMD}{GMR_y} = ۲\times۱۰^{-۷} \ln\frac{D}{\frac{D}{۸}} = ۲\times۱۰^{-۷} \ln۲^۳ = ۶\times۱۰^{-۷} \ln۲$$

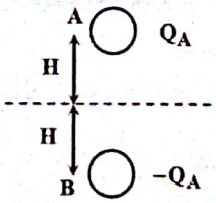
با توجه به این‌که اندوکتانس خط مجموع اندوکتانس رفت و برگشت است، داریم:

$$L = L_x + L_y = ۲\times۱۰^{-۷} \ln۲ + ۶\times۱۰^{-۷} \ln۲ = ۸\times۱۰^{-۷} \ln۲ = ۲\times۱۰^{-۷} \ln۱۶$$

۹۲ـ گزینه «۳» برای فهم بهتر، شکل داده شده در صورت سؤال را دوباره رسم می‌کنیم:



با توجه به این‌که هادی در نزدیکی زمین قرار دارد در محاسبه کاپاسیتانس آن باید اثر زمین را نیز در نظر بگیریم.



گفتیم هنگامی که یک هادی در نزدیکی زمین قرار می‌گیرد از تئوری تصویر استفاده کرده و زمین را با یک هادی با بار منفی مدل می‌کنیم. برای شکل سؤال زمین را مانند روبرو مدل می‌کنیم. حال کاپاسیتانس دو هادی A و B از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$C_{AB} = \frac{\pi\varepsilon_۰}{\ln\frac{۲H}{r}}$$

با بدست آمدن C_{AB}، مقدار C_{An} به شرح زیر به دست می‌آید:

$$C_{An} = ۲C_{AB} = \frac{۲\pi\varepsilon_۰}{\ln\frac{۲H}{r}}$$

۹۳ـ گزینه «۱» برای مدل خط انتقال کوتاه ماتریس انتقال $T=\begin{bmatrix}1 & Z\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ را به دست آوردیم. در صورتی که چند خط با هم سری شوند، ماتریس انتقال معادل از حاصل‌ضرب ماتریس انتقال تک‌تک خطوط محاسبه می‌شود. در این سؤال، دو خط با امپدانس‌های $Z_1=1\Omega$ و $Z_2=3\Omega$ با هم سری شده‌اند. لذا ماتریس انتقال خط حاصل برابر می‌شود با:

$$T_{eq}=T_1T_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

با مقایسه ماتریس به دست آمده با $T=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$ داریم:

$$A=D=1\ ,\ B=4\Omega\ ,\ C=0$$

۹۴ـ گزینه «۲» روابط $L=2\times10^{-7}\ln\frac{D}{r'}$ و $C=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{D}{r}}$ را برای اندوکتانس و کاپاسیتانس یک خط بدست آوردیم. راکتانس سلفی خط به صورت $X_L=\omega L$ است. در صورتی که فاصله بین هادی‌ها (D) را افزایش دهیم با توجه به رابطه L، اندوکتانس افزایش یافته و با توجه به رابطه X_L، راکتانس سلفی خط نیز افزایش می‌یابد اما با توجه به رابطه C،کاپاسیتانس خط کاهش می‌یابد.

۹۵ـ گزینه «۳» برای یک خط بلند در حالت کلی داریم:

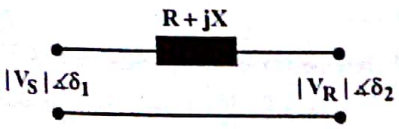
$$\begin{cases}V_s=\cosh\gamma\ell V_R+Z_c\sinh\gamma\ell I_R\\ I_s=\frac{1}{Z_c}\sinh\gamma\ell V_R+\cosh\gamma\ell I_R\end{cases}$$

در یک خط بدون تلف $\gamma=j\beta$ است، که با جایگذاری این رابطه در تساوی‌های بالا داریم:

$$\begin{cases}V_s=\cos\beta\ell V_R+jZ_c\sin\beta\ell I_R & (1)\\ I_s=\frac{j}{Z_c}\sin\beta\ell V_R+\cos\beta\ell I_R & (2)\end{cases}$$

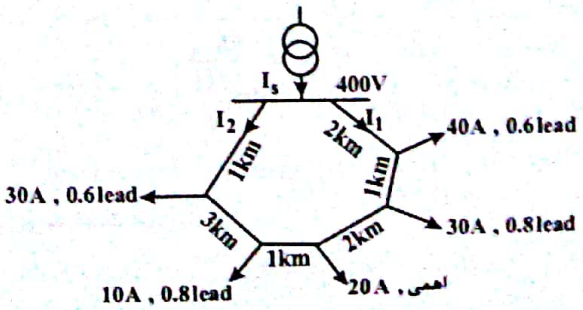
در حالت بی‌باری انتهای خط مدار باز و $I_R=0$ است. در تساوی (۱) قرار می‌دهیم $I_R=0$ و ولتاژ V_R را می‌یابیم: $V_s=\cos\beta\ell V_R\Rightarrow V_R=\frac{V_s}{\cos\beta\ell}$

۹۶ـ گزینه «۱» برای فهم بهتر شکل مدار را دوباره رسم می‌کنیم.



برای تخمین سریع توان اکتیو از پخش بار DC استفاده می‌کنیم. در این نوع پخش بار با توجه به فرض این‌که اختلاف زاویه ولتاژ دو شین کم است، برای محاسبه توان اکتیو عبوری از یک خط از رابطه $P=\frac{1}{X}(\delta_1-\delta_2)$ استفاده می‌کنیم که در این رابطه δ بر حسب رادیان و X پریونیت است. با توجه به توضیحات داده شده گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۹۷ـ گزینه «۳» جریان منبع برابر حاصل جمع دو جریان I_1 و I_2 نشان داده شده در شکل زیر است:



برای محاسبه جریان‌ها در کل حلقه شکل KVL می‌زنیم:

$$KVL1: 2I_1 + Z(I_1 - 40(0/6 + j0/8)) + 2Z(I_1 - 40(0/6 + j0/8) - 30(0/8 + j0/6)) +$$
$$Z(I_1 - 40(0/6 + j0/8) - 30(0/8 + j0/6) - 20) + 3Z(I_1 - 40(0/6 + j0/8) - 30(0/8 + j0/6) - 20 - 10(0/8 + j0/6)) +$$
$$Z(I_1 - 40(0/6 + j0/8) - 30(0/8 + j0/6) - 20 - 10(0/8 + j0/6) - 30(0/6 + j0/8)) = 0$$

با ساده‌سازی معادله بدست آمده جریان I_1 برابر خواهد شد با:

$$10I_1 = 510 - j334 \Rightarrow I_1 = (51 - j33/4)A$$

با توجه به I_1 بدست آمده جریان I_2 برابر خواهد بود با:

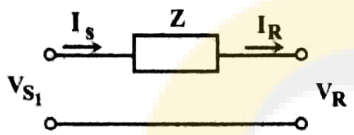
$$I_2 = (I_1 - 70(0/6 + j0/8) - 40(0/8 + j0/6) - 20) = (43 + j13/4)A$$

جریان منبع مجموع دو جریان I_1 و I_2 است که برابر می‌شود با:

$$I_s = I_1 + I_2 = (43 + 51) + j(-33/4 + 13/4) = (94 - j20)A$$

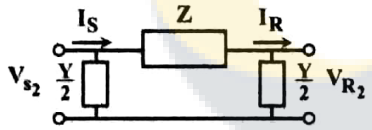
البته حل این مسأله که مقصود طراح سؤال نیز بوده است به شرطی صحیح است که مقدار ضریب توان‌های داده شده پس‌فاز و پیش‌فاز نسبت به زاویه مرجع یعنی $400\angle 0^\circ V$ در نظر گرفته شده باشد ولی اگر در بار $40A$ و $0/6$ پیش‌فاز مقصود عقب‌افتادگی زاویه $53/1^\circ$ نسبت به ولتاژ آن بار باشد و این موضوع در بارهای دیگر نیز صادق باشد مسأله بسیار پیچیده بوده و به سادگی بالا حل نخواهد شد.

۹۸ـ گزینه «۱» برای حل سوال در دو مدل فرض شده برای خط $|V_s|$ را بدست آورده سپس اختلاف این دو را محاسبه می‌کنیم. برای مدل خط انتقال کوتاه نشان داده شده در شکل مقابل داریم:



$$V_{s_1} = V_R + ZI_R \quad (1)$$

برای مدل π خط متوسط نشان داده شده در شکل مقابل V_s برابر می‌شود با:



$$V_{s_2} = (1 + \frac{YZ}{2})V_R + ZI_R \quad (2)$$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) اندازه اختلاف ولتاژ ابتدای خط در دو حالت برابر است با:

$$|\Delta V_s| = |\frac{YZ}{2}||V_R| \xrightarrow{Y=jB, Z=R+jX} |\Delta V_s| = \frac{B}{2}\sqrt{R^2 + X^2}\,|V_R|$$

با توجه به این‌که $R \ll X$ است (در صورت مسأله به طور اشتباهی $R < X$ ذکر شده است)

$$|\Delta V| = \frac{BX}{2}V_R < \frac{BXV_R}{\sqrt{2}}$$

۹۹ـ گزینه «۲و۳» برای توان اکتیو تزریقی به شین iام رابطه $P_i = \sum |V_i||V_j||Y_{ij}|\cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij})$ را بدست آوردیم. در صورت سوال فرض شده است که اندازه ولتاژ شین‌ها یک و اختلاف زاویه ولتاژ شین‌ها کوچک باشد. با این فرض‌ها می‌توان تساوی P_i را به شکل زیر ساده کرد:

$$\xrightarrow{|V_i|=|V_j|=1} P_i = \sum |Y_{ij}|\cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij}) = \sum |Y_{ij}|[\cos(\delta_i - \delta_j)\cos\theta_{ij} + \sin(\delta_i - \delta_j)\sin(\theta_{ij})]$$

$$\xrightarrow[\cos(\delta_i-\delta_j)=1\ ,\ \sin(\delta_i-\delta_j)=\delta_i-\delta_j]{\delta_i-\delta_j<<1} P_i = \sum |Y_{ij}|[\cos\theta_{ij} + (\delta_i - \delta_j)\sin\theta_{ij}]$$

$$= \sum[|Y_{ij}|\cos\theta_{ij} + |Y_{ij}|\sin\theta_{ij}(\delta_i - \delta_j)] = \sum[G_{ij} + B_{ij}(\delta_i - \delta_j)]$$

۱۰۰ـ گزینه «۱» برای توان اکتیو و راکتیو شین iام روابط زیر را بدست آوردیم:

$$P_i = \sum_{i=1}^{N} |V_i||V_j||Y_{ij}|\cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij})$$

$$Q_i = \sum_{i=1}^{N} |V_i||V_j||Y_{ij}|\sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij})$$

در صورتی که در روابط بالا جمله $j=i$ ام را جدا کنیم، داریم:

$$P_i = G_{ii}|V_i|^2 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} |V_i||V_j||Y_{ij}|\cos(\delta_i-\delta_j-\theta_{ij}) \qquad (*)$$

$$Q_i = -B_{ii}|V_i|^2 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} |V_i||V_j||Y_{ij}|\sin(\delta_i-\delta_j-\theta_{ij}) \qquad (**)$$

با استفاده از روابط (*) و (**) برای شین ۲ در شکل سوال خواهیم داشت: $(|V_1|=1\,p.u)$

$$\begin{cases} P_2 = G_{22}|V_2|^2 + |V_1||V_2||Y_{12}|\cos(\delta_2-\delta_1-\theta_{12}) \\ Q_2 = -B_{22}|V_2|^2 + |V_1||V_2||Y_{12}|\sin(\delta_2-\delta_1-\theta_{12}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_2 - G_{22}|V_2|^2 = |V_2||Y_{12}|\cos(\delta_2-\delta_1-\theta_{12}) & (1) \\ Q_2 + B_{22}|V_2|^2 = |V_2||Y_{12}|\sin(\delta_2-\delta_1-\theta_{12}) & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم تساوی ۲ به ۱}} \tan(\delta_2-\delta_1-\theta_{12}) = \frac{Q_2 + B_{22}|V_2|^2}{P_2 - G_{22}|V_2|^2}$$

۱۰۱ـ گزینه «۳» جهت پخش توان اکتیو با توجه به اختلاف زاویه ولتاژ شین‌ها و جهت پخش توان راکتیو با توجه به اندازه ولتاژ شین‌ها تعیین می‌شود. در این سؤال زاویه ولتاژ شین ۱ از زاویه ولتاژ شین ۲ بزرگتر و اندازه ولتاژ آن از اندازه ولتاژ شین ۲ کوچکتر است. لذا توان اکتیو از شین ۱ به طرف شین ۲ و توان راکتیو از شین ۲ به سمت شین ۱ جاری می‌شود.

۱۰۲ـ گزینه «۱» گفتیم در صورتی که یک شبکه n شین داشته باشد که m شین آنها کنترل ولتاژ باشند، ابعاد ماتریس ژاکوبین و زیر ماتریس‌های آن به شکل زیر خواهد بود:

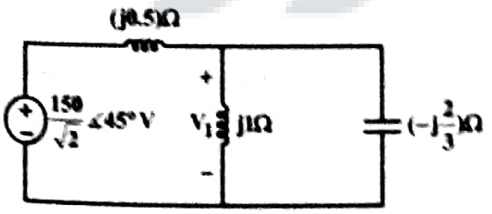
$$\begin{array}{c|cc} & n-1 & n-m-1 \\ \hline n-1 & J_1 & J_2 \\ n-m-1 & J_3 & J_4 \end{array}$$

با توجه به ماتریس نشان داده شده ابعاد زیر ماتریس J_2، $(n-1)\times(n-m-1)$ است. در این سؤال ۱۴ شین داریم که روی ۲ شین ژنراتور و روی ۳تای دیگر کندانسور نصب است اما یکی از ژنراتورها نمی‌تواند توان راکتیو مورد نیاز را تأمین کند. لذا در مجموع ۴ شین کنترل ولتاژ داریم و $m=4$. ابعاد J_2، $(n-1)\times(n-m-1)$ است که با جایگذاری $n=14$ و $m=4$ برابر می‌شود با: J_2 ابعاد $=13\times 9$

در اینجا باید دقت نمود که در حل این مسأله فرض شده است علاوه بر شین اصلی (اسلک) که دارای ژنراتور است روی دو شین دیگر ژنراتور نصب شده است. اگر مقصود طراح سؤال وجود دو شین ژنراتور (با احتساب شین اسلک باشد در این صورت) $m=3$ بوده و ابعاد J_2 برابر است با:

$(14-1)(14-3-1)=13\times 10$

۱۰۳ـ گزینه «۳» ولتاژ V_1 ولتاژ دو سر سلف و تک فاز است. برای بدست آوردن V_1 بهتر است که بار خازنی با اتصال مثلث را به اتصال ستاره تبدیل کنیم و مدار تک فاز مقابل را تحلیل کنیم:



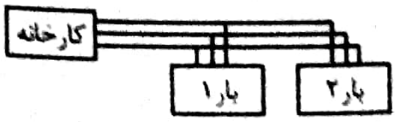
$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}$$

با توجه به قانون تقسیم ولتاژ V_1 برابر می‌شود با:

$$V_1 = \left[\frac{j1\|-j\frac{2}{3}}{(j1\|-j\frac{2}{3})+j0.5}\right]\times\frac{150}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ = \frac{-j2}{-j2+j0.5}\times\frac{150}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ = 100\sqrt{2}\angle 45^\circ$$

$|V_1| = 100\sqrt{2}\,V$

۱۰۴ـ گزینه «۲» برای فهم بهتر ابتدا شکل سؤال را با توجه به توضیحات داده شده در مورد نحوه تغذیه بارها رسم می‌کنیم.



بار اول $P=60\,kW$

$Q=660\,kVAr$

بار دوم $P=240\,kW$

$\cos\theta = 0.8$ lead

وان اکتیو و راکتیو تحویلی برابر است با مجموع توان‌های اکتیو و راکتیو بارها. با توجه به این‌که $S = P + jQ$ برای هر بار S یعنی توان مختلط را حاسبه کرده سپس با هم جمع می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{بار ۱ سلفی}} S_۱ = P_۱ + jQ_۱ = (۶۰ + j۶۶۰)kVA$$

$$\xrightarrow{\text{بار ۲ خازنی}} S_۲ = P_۲ + jQ_۲ = \frac{P_۲}{\cos\theta_۲} \measuredangle -\cos^{-۱}\theta_۲ = ۳۰۰(۰/۸ - j۰/۶) = (۲۴۰ - j۱۸۰)kVA$$

$$S_{\text{کارخانه}} = S_۱ + S_۲ = (۳۰۰ + j۴۸۰)kVA$$

ا مقایسه رابطه بالا با $S = P + jQ$ داریم:

$$P_{\text{کارخانه}} = ۳۰۰kW \ , \ Q_{\text{کارخانه}} = ۴۸۰kVAr$$

۱۰۵ـ گزینه «۱» هنگامی که خط با امپدانس موجی $(Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}})$ بارگذاری شود، اندازه ولتاژ و جریان برای کل خط یکسان و پروفیل ولتاژ تخت حاصل می‌شود، لذا گزینه ۱ پاسخ صحیح است.